مسألة اللانهائية في الرياضيات

نظرية جورج كانتور

تأليف

د.عبد اللطيف يوسف الصديقي



مسألة اللانهائية
في الرياضيات
نظرية جورج كانتور

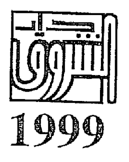
S568m

المركز الإسلامي الثقافي
مكتبة سماحة آية الله العظمى
السيد محمد حسين فضل الله العامة
الرقم ....

مسألة اللانهائية
في الرياضيات

نظرية جورج كانتور

تأليف
د. عبداللطيف يوسف الصديقي



1999

● مسألة اللانهائية في الرياضيات (نظرية جورج كانتور) .

● د. عبد اللطيف يوسف الصديقي .

● الطبعة العربية الأولى: الإصدار الأول 1999 .

● رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : 1998/8/1257 .

ردمك ISBN 9957 - 00 - 038 -1

● جميع الحقوق محفوظة © .



دار الشروق للنشر والتوزيع

هاتف : 4618190 / 4618191 / 4624321 فاكس : 4610065

ص.ب : 926463 الرمز البريدي : 11110 عمان - الاردن

■ التوزيع في فلسطين :

دار الشروق للنشر والتوزيع

رام الله - المنارة - الشارع الرئيسي

جميع الحقوق محفوظة، لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله أو إستنساخه بأي شكل من الأشكال دون إذن خطّي مسبق من الناشر.

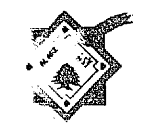
All rights reserved. No Part of this book may be reproduced, or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without the prior permission in writing of the publisher.

■ التنضيد والاخراج الداخلي وتصميم الغلاف وفرز الألوان و الأفلام :

الشروق للدعاية والإعلان والتسويق/ قسم الخدمات المطبعية

هاتف: 4618190/1 فاكس 4610065 / ص.ب. 926463 عمان (11110) الأردن

تاريخ الصدور: كانون الثاني / يناير 1999



طبع في مطابع الأرز ٣٦١٠٠١١

توطئة

"الحياة ممتعة لشيئين فقط، الاكتشـــاف فـــي الرياضيـــات وتعليـــم الرياضيات"[1]

S. Poisson سيمون بوانسو

تبدو اللانهائية عند عامة الناس أنها شيء ضخم للغاية وغير محدد، ومن ثم لا يمكـــن معرفتها أو إدراكها، وبصورة أخرى تعني شـــيئا كبيراً جدا خارج نطاق العد نفسه، وقد تساوي عدد نجوم الكـــون كله أو عدد حبات الرمل الموجودة على سواحل البحار.

وفي الواقع لا نصادف اللانهائية وجها لوجه ولكن وجود كـــون أو عالم لانهائي أمر حتمي ، والدليل على ذلك هو تصورنا للفكـــرة نفسها كما هو الحال في العلوم الرياضية التي تمثل انعكاساً للواقـــع . غالبا ما نصادف اللانهائية في هذه العلوم بالرمز المعقوف (∞) أو مـــا يطلق عليه عادة "بعقدة الحب" والحقيقة وراء هذا الرمز هو الـــدوران المستمر حول المنحى. وهذا مما دفع علماء الرياضيات منـــذ قـــرون عديدة في محاولة فهم سحر اللانهائية وغموض ماهيتـــها جـــاهدين للتوصل إلى قياسها ومعرفة قوانينها والقواعد التي تحكمها كي تقـــف في صف المفاهيم الرياضية الأخرى .

---

[1] ترجمة كاتب هذه السطور

لقد كانت فكرة اللانهائية مصدر قلق وإرباك أكثر من ألفي عام، فاليونانيون القدماء مثلاً أبدو محاولاتهم للتعرف عليها والوصول إلى ماهيتها ولكنهم لم يتوصلوا إلى نتائج مرضية بسبب التناقضات التي تفرزها تلك الفكرة وتداخلها في المجالات الدينية والفلسفية.

ورغم ما أحرزه الإغريق من تقدم يثنى عليه، فإن الفكرة لم تتبلور تماماً إلا في القرن التاسع عشر وبالذات في أعمال بلزانو وفيرشتراس وكانتور والأخير هو محطتنا ولب حديثنا .

وفي هذا الصدد عبر أستاذنا الكبير المرحوم الدكتور علي مصطفى مشرفة أجمل تعبير عن اللانهائية عندما كتب في مقال نشر في المجمع المصري للثقافة العلمية عام 1933 "اللانهائية كلمة تعبر عن معناها تعبيرا حرفيا دون حاجة من جانبي أو جانب شخص آخر إلى تفسير. فـ " لا" النافية. ونهاية حد أو آخر أو طرف. وإذن ما لا حد له أو ما لا آخر أو طرف له. فيقال لشيء أنه لا نهائي إذا لم يوجد له حد أو نهاية. وعكسه الشيء المنتهي أو المحدد. فاللانهائية تعني الشيء الذي لا يحده شيء، أي بلا حدود وهي ليست بعدد صحيح و إنما هي كمية أو مقدار عن حالة غير منتهية.

ويبقى هذا التعريف فى حيز المفاهيم التقليدية الذي يعبر عن اللانهائية بصورتها الممكنة أو الجهدية potential Infinite، بينما يبقى الأمر في صورتها الحقيقية أو الفعلية Actual Infinite و هي الإضافة التي تقدم بها كانتور ، كما سنرى شرح كل منهما من خلال هذه الصفحات .

والسؤال هيهنا، ما هو حجم اللانهائية ؟ كان هذا السؤال مطروحا أمام كانتور قبل أن يخوض مسألة اللانهائية من كلا

طرفيها*، تلك المسألة التي حيرت عقول سلفه ومعاصريه مما دفعت الرياضي الكبير جوزيف لاكرانج J.Lagrange (رئيس قسم الرياضيات- أكاديمية برلين للعلوم) في عام 1784 أن يعلن عن منح جائزة لمن يجد حلاً لهذه المعضلة- بناءً على اقتراح الأكاديمية- وأخيراً جاءت حلول كثيرة في غاية التعقيد الرياضي ولكن من بين تلك الحلول هناك حل بسيط جداً تقدم به الرياضي السويسري سيمون لوهلير Simon Lhuillier الذي فاز بالجائزة، و الحل هو: "اللانهائية هي الهاوية التي تتداخل فيها أفكارنا " *

والحل الجذري هو الذي نحن بصدده و ما ترمي إليه هذه الصفحات وهو الذي أتى به جورج كانتور، الرياضي الذي هذب فكرة اللانهائية تهذيبا رائعا مقدما الحل النهائي بعدما كانت اللانهائية عائمة في محيط المطلق واللامحدود، وأعاد اعتبار فكرة اللانهائية الحقيقية التي نبذها سلفه، وهي اللانهائية الكاملة أو التامة وليست الممكنة أو الجهدية كما كان يتصورها الأوائل .

برهن كانتور على وجود مستويات مختلفة من اللانهائيات، بمعنى آخر، هناك رتب ودرجات من اللانهائيات كل مستوى يكون أكبر من سابقه وهكذا نحصل على رتب لانهائية من اللانهائيات وإن جميع المجموعات اللانهائية ليس لها نفس المقدار، وإنه يمكن مقارنة الواحدة مع الأخرى. فمثلا مجموعة نقط الخط المستقيم و مجموعة الكسور كلتاهما لانهائيتان. وبرهن أيضا على أن المجموعة الأولى أكبر حجما و مقدارا من الأخرى .

---

* اللانهائية في الكبر و اللانهائة في الصغر إلا أن كانتور ركز جهوده ودراساته على اللانهائية في الكبر فقط و هذه تعتبر ثغرة في النظرية كما يراها كاتب هذه السطور.

* Kline ,p. 149-150

ومن هذا المنطلق شن معاصرو كانتور حرباً ضده، فمنهم من اتهمه بالجنون وآخر بالشعوذة الخ من التهم، فالرياضي الفرنسي الشهير هنري بوانكاريه H.Poincare شجب نظرية الأعداد اللانهائية بعنف حين قال: بأنه مرض خطير جاء به كانتور وتأزمت به الرياضيات، لذا يجب التخلص منه تماماً ". وقال آخر "إن كانتور كما لو كان يبني قصراً من الرمل بنظريته هذا "، أما أستاذه ليبولد كرونكر L.Kroneker وأحد مشاهير الرياضيات آنذاك فقد شن عليه هجوما قاسيا متهما إياه بالدجل والشعوذة وإن أعماله الرياضية ليست إلا فلسفة فارغة وجوفاء وليس العلم الرياضي بحاجة إليها إطلاقا". وكانت نتيجة هذا الهجوم الشخصي الدفين الذي تتستر وراءه الغيرة والحسد هلاك كانتور بعد إصابته بانهيار عصبي حاد قاده إلى مستشفى الأمراض العقلية الذي مكث فيه أكثر من ثمانية أعوام حتى وفاته. بينما يقول الرياضي هلبرت" لقد خلق لنا كانتور فردوسا وليس باستطاعة أحد أن يخرجنا منه " .

ويعزو حرصنا لكانتور إلى وجود مفهوم اللانهائية في الرياضيات وسيادتها بجانب الكينونات الرياضية الأخرى، حيث لا يمكن دراستها أي اللانهائية بصورة مستقلة فحسب بل مجتمعة مع بعضها على هيئة فئات أو مجموعات وإن عناصر تلك المجموعات غالبا ما تكون لانهائية، لذا حتم على الرياضيين الاستسلام لطبيعة اللانهائية وعمق تأثيرها في العلم الرياضي وفي العلوم الأخرى .

لقد حاولنا في هذه الدراسة البسيطة إيجاز حياة كانتور وأعماله، ولخصنا نظريته حول اللانهائية وتتبعنا مسارها التاريخي وكيف توصل كانتور إلى فكرة اللانهائية وبالذات اللانهائية الحقيقية ومن ثم كيف

هذب اللانهائية تهذيبا رياضيا بعدما كانت عائمة في براثن الميتافيزيقيا، ومن ثم أصبحت كينونة مستقلة يمكن استيعابها وتطبيقها قدر الإمكان.

وجورج كانتور هو مؤسس نظرية اللانهائيات فى الرياضيات ويمكن أن يقال بحق مؤسس الرياضيات الحديثة حيث كان شغله الشاغل هو إنجاز مفهوم المجموعة باعتبارها إحدى ركائز الرياضيات الأساسية وجعل نظرية الأعداد الموغلة (ما وراء المنتهي) وبالذات مفهوم الأعداد الترتيبية لب أعماله .

والهدف الأساسي الذي قادنا إلى كتابة موضوع شائك كهذا هو افتقار المكتبة العربية إلى دراسة حول فكرة اللانهائية، وليس لدينا أي دليل يبرر هذا الافتقار، إلا أننا وجدنا أنه من الضروري تعريف القارئ والباحث على السواء بأهمية دور اللانهائية ليس في الرياضيات فحسب بل في شتى مجالات الحياة، لأن العلم الرياضي في حد ذاته ليس إلا علم اللانهائيات، ودورنا أيضا هو لفت انتباه الباحث الذي غابت عنه فكرة اللانهائية واعتبرها مجرد رمز خال من كل معنى .

لقد قسمنا الدراسة إلى فصول صغيرة جدا بحيث يمكن قرائتها بسهولة دون عناء التفاصيل التي غالبا ما يتحاشاها الرياضي، فكانت فصولا موجزة عن فكرة اللانهائية، أولها كان، التطور التاريخي لفكرة اللانهائية وهو يمثل مرحلة ما قبل الكانتورية، حيث ناقشنا فيه الأفكار الأساسية التي دفعت كانتور للتوصل إلى فكرة الأعداد الموغلة أو ما بعد المنتهي .

ثم تطرقنا إلى الأساليب الرياضية التي تميزت به نظريته وصولا إلى الحلول الممكنة والجذرية في نظرنا التي قدمها بجرأة و حماس كي يثبت كل الأسس المنطقية والرياضية لتصبح مدخلا خلابا لكل فرع من فروع الرياضيات، وختمنا دراستنا ببعض المفارقات التي أفرزها النظرية التي دون شك حتمية نتيجة عمق جذورها وسعة افقها، وأضفنا إلى هذا الفصل موجزا عن نظرية التحليل اللامعياري (اللاقياسي) الذي تقدم به الرياضي الأمريكي روبنسون. هذا التحليل الذي يمثل اللانهائيات في الصغر وهو الجزء الذي أهمله أو تجاهله كانتور، وما إضافتنا إلى التحليل اللامعياري إلا سد ثغرة تركتها الكانتورية بدافع غير أكاديمي.

و أخيرا أتوجه بالشكر والعرفان إلى جميع من كان له العون في إعداد هذه الدراسة مما أتاح لي صفاء الوقت وسعته، أذكر بالأخص فضيلة الوالد والوالدة و إلى زوجتي وأبنائي محمود وسارة ويوسف فلهم خالص التقدير والثناء وأتوجه أيضا إلى الأخ الفاضل الدكتور علي المدني على ما قام به من مراجعة مسودة هذا العمل وما قدمه من اقتراحات لغوية كان لها الأثر في تطوير حسي اللغوي، فله خالص الثناء و التقدير ...

البحرين ، مايو 1998

الفصل الأول

1- تقديم

2- موجز حياة كانتور

3- خصوم كانتور

تقديم

"إن تعريف اللانهائية هو لانهائي في التعقيد لأن اللانهائية ذاتها متضمنة في التعريف نفسه:" *

برتراند رسل

عندما تتناول أي كتاب دراسي، سواء كان في الجبر أو في التحليل الرياضي أو في التبولوجيا أو في أي فرع آخر من فروع الرياضيات، فستجده يتضمن فصلاً أو قسماً خاصاً عن نظرية المجموعات (المجاميع) Set Theory أو كما يطلق عليها بالألمانية Mengenlehre. وهذا يدل على أن هذه النظرية تكمن في قاع جميع فروع الرياضيات بمثابة الأسس التي ينطلق منها هذا الفرع أو ذاك، بالإضافة إلى استقلالها المطلق باعتبارها فرعاً من فروع الرياضيات الذي يطلق عليه "نظرية المجموعات". ووجود هذه النظرية في تلك الفروع إلى أهميتها النظرية والتطبيقية معا، وأن تقدم هذه النظرية يعد أحد الإنجازات التي توجت الرياضيات المعاصرة .

والغريب في الأمر أن هذا الفرع هو ابتكار شخص واحد تدين له الرياضيات الحديثة وفلسفتها وتعتزان به لأنه فتح آفاقا جديدة أمام

---

*ترجمة كاتب هذه السطور

الرياضيين وفك الرموز العصية وهذب فكرة اللانهائية بعدما كـــانت عائمة فى محيط اللامتعين واللامحدود وباتت مكتملـــة حـــتى ألفـــها الرياضيون أنفسهم وفلاسفة العلم أيضاً، الرجل صاحب هذا الابتكار هو جورج كانتور.

وكما كانت الفيثاغورية تنظر إلى أن "كل شيء هـــو عـــدد" أو يمكن التعبير عنه بذلك، والعدد هو جوهر الوجود و حقيقته" هنـــاك صفة عامة في كل شيء جسما أو غير جسم له صفـــة العدديـــة أو بعبارة أخرى لا يمتاز شيء عن شيء إلا بالعدد، فالعدد هو جوهـــر الوجود وحقيقته " أما أصحاب نظرية المجموعات فقد رفعوا شـعاراً آخر لهم هو أن"كل شيء هو مجموعة" أو يمكن تمثيله بمجموعة .

وبما أن وجود اللانهائية الحقيقية Actual أجبر العلماء على إعـــادة دراسة الوضع الفيثاغوري فإن وجود اللانهائية المطلقة Absolute هـــو الآخر دفع الرياضيين إلى إعادة الصرح الكانتوري، وعلى ضوء ذلـك تمت دراسة المجموعات اللانهائيـــة وبالأخص اللانهائية في الكـــبر أو كما يطلق عليها بالمصطلح الكانتوري "الأعداد الموغلـــة" Transfinite Numbers أو ما وراء المنتهى.

لقد عبر كانتور بنفسه عن تلك الأعداد مصرحاً أنـــه " ليـــس بمقدور أحد أن يقول إن الأعداد الموغلة تقف عند حـــد معـــين، أو تكمن مع الأعداد الصماء (غير المنطقة) اللانهائية رغم أن جوهرهـــا

واحد، إلا أن الأولى – الأعداد الموغلة – تعتبر بمثابة الأساس أو التصحيح السليم الذي يقودنا إلى اللانهائية الحقيقية"[1].

فموضوع نظرية المجموعات إذن وبالأخص المجموعات اللانهائية التي انطلق منها كانتور في الفترة من 1874–1895 أثار جدلاً وصراعاً فكريا لاتزال آثاره باقية حتى يومنا هذا . وبيت القصيد في هذا كله هو الانقلاب الذي أحدثته النظرية على بعض المبادئ الرياضية الكلاسيكية.

فالصعوبات الفيثاغورية مثلا حول الجذر التربيعي للعدد اثنين ومفارقات زينو Zeno حول مفهومي "الاستمرارية" (الاتصال) والتقسيم اللانهائي هي جوهر هذا البحث ولب الموضوع . ونتيجة هذا الصراع أولى الرياضيون اهتماما بالفلسفة أدى إلى البحث العميق لدراسة الأسس الرياضية قاصدين من وراء ذلك إيجاد الحلول الممكنة لتلك المعضلات التي شطرتهم إلى عدة أقسام أدت بالتالي إلى ظهور مذاهب فلسفية داخل إطار الفكر الرياضي نفسه .

ومن خلال دراستنا للأفكار المستخدمة في التحليل الرياضي، ومدى فعاليتها ورغم امتداد جذور هذا الخلاف إلى القرون الوسطى بل وربما إلى عصر الإغريق، إلا أن فروع هذا النزاع غدا مقبولا من قبل بعض الرياضيين باعتباره قضية الخروج على القواعد المألوفة.

---

1 Rucker p.69

و رغم ما أحرزت نظرية كانتور حول اللانهائية من تقدم ملموس في جميع حقول المعرفة إلا أنها في واقع الأمر أشد معركة عرفها تاريخ العلم من خلال الفكر التقليدي الرياضي حيث شبهها العالم الكبير ألبرت آينشتاين ذات مرة" بمشادة الضفدعة و الفأر" .

وفي عام 1831 عبر جاوس Gauss عن مخاوفه حول اللانهائية الحقيقية قائلا " إنني أقف بشدة إزاء المقدار أو الكمية اللانهائية كشيء متكامل أو تام والذي يعتبر شيئا غير مقبول أو مسموحا به في الرياضيات. فاللانهائية تعبير عن أسلوب في التحدث بالمعنى الحقيقي وهي نهاية لأي نسب محددة تؤول إلى الاقتراب بينما الأخرى تكون في تزايد دون أي قيود أو شروط ... "[2] .

فإذا كانت (x) عددا حقيقيا ما، فإن الكسر 1/x يتضاءل بزيادة قيمة x، ومن ثم يمكن إيجاد قيمة له حيث أن الكسر نفسه يختلف عن الصفر- أي كمية موجبة صغيرة جدا - وكلما استمرت x في الزيادة فإن الفرق يظل أصغر من أية كمية موجبة مهما كانت قيمتها في الصغر و يقال إذن بأن الصفر هو نهاية الكسر أو المقدار 1/x وذلك عندما يؤل x إلى اللانهائية (بالرموز $\lim 1/x = 0$) وكذلك فالدالة $f(x) = 1/x$. $\lim 1/x = \infty$ لقيمة موجبة تكون في ازدياد كلما صغرت x .

---

2 Khine, M.

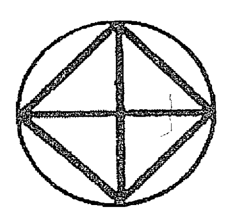
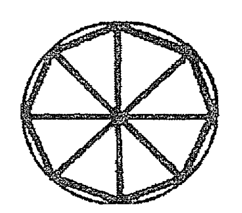
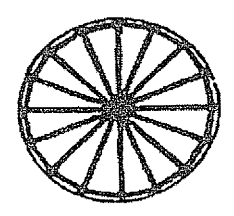
وبناء على ذلك فإنه يمكن تعريف الكميات المتناهية فى الكبر وكذلك المتناهية في الصغر بالآتي:

يقال للكمية المتغيرة التي تزداد قيمتها المطلقة بلا حدود بأنها كمية متناهية في الكبر . أما الكمية التي تكون نهايتها مساوية للصفر تسمى كمية متناهية في الصغر.

أما في الهندسة فاللانهائية هي "موقع" فمثلا يقال إن الخطين المتوازيين يتقاطعان في نقطة في اللانهائية وكذلك المستويات المتوازية تتقاطع أو تلتقي عند خط في اللانهائية وخط المقارب Asymptote يلتقي أيضاً عند اللانهائية وهكذا ، أما فكرة اللانهائية باعتبارها محلا أو موقعاً فقد أدخلها الرياضي الفلكي جوهان كبلر J.Kepler و هو الذي أشار إلى أن القطع الزائد Parabola يمكن اعتباره شكلا اهليجياً Ellipse أو قطعاً ناقصاً Hyperbola ببؤرة واحدة عند اللانهائية، ولكن الفكرة طورت فيما بعد من قبل دسارجيس Girard Desargues عند صياغته للهندسة الوصفية التي تفترض نقطا خيالية في اللانهائية .

لقد كان التصور الهندسي في فكرة اللانهائية عند الاغريق الأوائل عبارة عن العلاقة بين شكلي الدائرة والمضلع، فالدائرة ناتجة عن مضلع Polygon ذي أضلاع لانهائية ، أي كلما كثرت أو زاد عدد أضلاع المضلع أقترب من الشكل الدائري وعند حد معين من

الأضلاع المتعددة ، تنطبق الدائرة على المضلع ، أي يصبح المضلع ذا الأضلاع اللانهائية دائرة (أنظر الشكل أدناه) .

ردا على مخاوف جاوس يقول كانتور: "رغم الاختلاف الجوهري بين اللانهائية الممكنة (الجهدية) واللانهائية الحقيقية (الفعلية) فإن الأولى تعني ذلك التغير الذي يكون في تزايد دائم ويتجاوز جميع حدود النهايات (مثل العدد الحقيقي الذي أشرنا إليه سابقا) بينما الأخرى هي كمية ثابتة محددة تكمن وراء جميع الكميات المحددة...[3]".

وبإيجاز يمكن اعتبار اللانهائية الممكنة بأنها خطوات لامتناهية، أي دون وجود حد معين نقف عنده، بينما اللانهائية الحقيقية هي مجموعة لانهائية متكاملة .

---

3 Khine, M.

و يعلن كانتور أيضا عن سوء استخدام اللانهائية في الرياضيات التي غالبا ما تحير وتربك حتى الرياضيين أنفسهم و هذا ما حدث بالفعل لجاوس وآخرين ممن وجهوا التهم إلى كانتور ودحضوا شرعية اللانهائية الحقيقية واعتبروها قسرا لطبيعة الأشياء، فهي أي اللانهائية الحقيقية لا تبرز لنا كلية بأنها كاملة و لكن تؤخذ كما هي .

I– موجز حياة جورج كانتور:

جورج فردينارد لودفيج فيلب كانتور Georg Cantor هو الابن البكر لأب تاجر ناجح هو جورج فالدمار كانتور Georg Waldmar Cantor من مواليد كوبنهاغن (الدانمارك) هاجر إلى سانت بيترسبيرج St.Petersburg (روسيا لينينغراد سابقا- عصر الإمبراطورية السوفيتية) و فيها ولد كانتور فى الثالث من مارس عام 1845 و لكن مرض والده الرئوي هو الذي دفعه إلى أن يغادر بيترسبيرج ويستقر في فرانكفورت (ألمانيا) في عام 1856 عندما كان الطفل كانتور في ربيعه الحادي عشر وهكذا عاش فيها الأب حياة رغيدة هنيئة حتى مات في عام 1863 .

أما أمه ماريا بوهم Marria Bohm فتنحدر من أسرة موسيقية عريقة، خالها جوزيف بوهم مدير معهد الموسيقى ومؤسس مدرسة عازفي الكمان ذائعة الصيت التي كان لها الأثر الكبير والحس العميق على تلامذتها .

و كان لكانتور أخ اسمه كونستانتين Constantin الـــذي أصبـــح ضابطا في الجيش الألماني (قلائل من يهود التحقوا بالجيش آنذاك) وله أخت هي صوفيا نوبلنك Sophie Nobiling .

أما طاقات كانتور الفنية وحسه الذي ورثه عن أمه فظلت حبيسة لم تجد مخرجاً لها إلا في الفلسفة والرياضيات، وربما قد تكـــون أحـــد الأسباب التي جعلته في حالة عدم استقرار دائم .

ورغم أن الأب اعتنق البروتستنانية وأمه كاثوليكيـــة -رومانيـــة المولد إلا أن كانتور اختار المذهب البروتستانتي ومن خلاله اكتســـب ذوقاً متميزاً في مجادلاته وخاصة في الأمور اللفظية الصغيرة في لاهوت العصور الوسطى، فإذا لم يكن كانتور رياضياً لكان قدره حتماً إمـــا الفلسفة أو اللاهوت ...

ويمكن أن يقـــال في هذا الصدد إن نظريـــة كـــانتور حـــول اللانهائية باتت حجر الزاوية عند اليسوعيين الذين كانت نزعـــاتهم المنطقية ممكنة عن طريق الخيال الرياضي الصرف الذي يكمـــن وراء تصوراتهم اللاهوتية حول إثبات وجود الخالق الذي لا مجال للشـــك فيه وما التماسك أو الانسجام الذاتي للثلاثي المقـــدس إلا اندمـــاج الثلاثة في الواحد أو الوحدة وما تفرع الواحد إلى ثلاثة إلا تعبيراً عن المساواة والخلود المشتركين.

ومثله مثل الرياضيين الموهوبين، بدأت موهبته الرياضية في سن ما قبل الخامسة عشرة، والتحق بمدرسة خاصة في فرانكفورت وفي دار مشتات، وفي عام 1860 التحق Gymnasium وهو في ربيعه الخامس عشر بمدينة فيزبادن. وكان قرار كانتور الابن دراسة الرياضيات واحترافها إلا أن والده كان يصر عليه رغم اعترافه بقدرة الصبي الرياضية الالتحاق بالهندسة لما لذلك من مستقبل ومصدر للرزق مضمون. حتى أن والده كتب في عام 1860 معبرا عن آماله وآمال جميع أفراد عائلته في ألمانيا وفي الدانمارك وروسيا أن يصبح ابنه بمشيئة الله نجما ساطعا في حقل الهندسة .

و قبل دخوله الجامعة وتبعا لما حققه من نجاح وتفوق في حقل الرياضيات، كتب إلى والده معبرا عن شعوره العميق تجاه حقل المستقبل- الرياضيات - الخطاب التالي:

" والدي العزيز

تستطيع أن تتأكد بنفسك كم كنت مسرورا برسالتك، لقد حددت مستقبلي بالفعل و سأكون مغتبطا عندما أعلم بأنك لن تنزعج إطلاقا عندما يقودني شعوري بما اختاره أنا ، و آمل أن يطيل الله في عمرك لترى فرحتي وسعادتي أيها الأب العطوف حيث أن روحي ووجودي جميعهما يعيشان في مهنتي وماذا يريد

المرء أكثر من شيء يرغب فيه ويتمناه وأن شعوره الداخلي هو الـذي يقوده إلى تحقيق ما يصبو إليه ".[4]

لسنا نعلم ما تركت هذه الرسـالة من أثر على الوالـد البـار، ولكن الذي ندركه هو كم كان شغف الابن عظيماً تجاه الحقل الذي عشقه حتى نهايته المحزنة – سنتحدث عنها فيما بعد- ولكـن رغـم ذلك الشقاء الذي جعله أحد أئمة الرياضيين، و ليس باسـتطاعتنا أن نتنبأ كيف كان الأمر لو خضع كانتور لرغبة أبيه ، ربما خسر العلـم الرياضي نجما براقا وحقلاً لم يحصد .

بدأ كانتور دراسته الجامعية في زيورخ عام 1862 وبعد عام انتقـل إلى جامعة برلين إبان وفاة والده وهناك درس الرياضيات والفلسـفة والفيزياء ولكن ميوله اندفعت إلى الحقلين الأولين بالتساوي وتاركـا الفيزياء دون مبالاة، ففي الرياضيات تتلمذ على يد الأساتذة كومـر Kummar وفيرشتراس Weirstrass وغريمه اللـدود كرونكر Kronecker. وبناء على العرف السائد في الجامعات الألمانية آنذاك فإنه يحق للطالب أن يقيم في مدينة ما ويلتحق بالدراسة في جامعة أخرى خارج تلـك المدينة وكان الأمر كذلك حيث كان يقيم كـانتور عـام 1866 في كوتنجن Gottingen ويدرس في برلين.

4 E.T. Bell : Men of Mathematics p.560

لقد كان المناخ الرياضي آنذاك مفعما بالحساب وبالذات عند أستاذيه كومر وكرونكر ولكن كانتور ولع بأعمال جاوس Gauss ونظرياته وهام بها حتى غاص فيها بعمق وبالذات في عمل جاوس الخالد Disquisitiones Arithmeticae "التحقيقات الحسابية" حيث تطرق إلى مسألة صعبة تركها جاوس دون حل . كتب كانتور أطروحة الدكتوراه حول مسألة الأعداد الصحيحة x,y & z للمعادلة غير المحددة: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ حيث a, b& c أعداد صحيحة حيث منحت له الدرجة في عام 1867.

لقد كان غرام كانتور الأول هو أعمال جاوس المتعلقة بالنظرية الرقمية التي فتن بها وسحر بمحتواها ووضوح وكمال براهينها ولكن تأثير أستاذه فيرشتراس جعله يتجه إلى التحليل الرياضي وبالذات المتسلسلات المثلثية (متسلسلات فورييه).

و لكن الصعوبات الحاسمة في هذه النظرية والمتعلقة بتقارب المتسلسلات اللانهائية كانت أقل عمقاً وقريبة المنال إذا ما قورنت بنظرية قوى المتسلسلات Power series وهى التي جذبت اهتمام كانتور ودفعته إلى أسس التحليل الرياضي أكثر من معاصريه الذين لم يولو اعتباراً لها وقادته أخيراً إلى احتضان رياضيات وفلسفة اللانهائية هذه الفلسفة التي تترعرع في قاع جميع القضايا المتعلقة بمفاهيم الاستمرارية والنهايات والتقاربية .

وقبل أن يتجاوز كانتور ربيعه الثلاثين نشرت ورقته الثورية في المجلة كريلله Crelle's حول نظرية المجموعات اللانهائية. ورغم أن نتائج هذا البحث غير متوقعة تماماً وكذلك مفارقاتها المتعلقة حول مجموعة جميع الأعداد الجبرية التي صاغها كانتور بطريقة بارعة وكذلك الطرق الجديدة غير المألوفة التي أدخلها في بحثه، فقد وضعت الرياضي الشاب في قائمة الرياضيين الخلاقين غير العاديين بغض النظر عن الإجماع أو الاتفاق الكلي حول هذا الموضوع ، وتبقى مسألة أخرى لسنا بصددها ولكن ما يجب قوله هو أن هذا الرجل أتى بشيء كامل الجدة و أزاح صخرة كبيرة كانت بمثابة عثرة في الرياضيات، فهذا العمل منحه قوة ونفوذاً يستحق من خلاله تقليد أي منصب ذي نفوذ وسلطان .

و في عام 1868 حصل على الدكتوراه من جامعة برلين فى أطروحة قدمها إلى الجامعة حول " نظرية الأعداد" وبعدها عين أستاذاً بجامعة هالة Halle Universitat دون راتب بل يتقاضى مكافأته من الطلاب مباشرة وهذا النظام كان معمولاً به في الجامعات الألمانية آنذاك ويطلق عليه بالألمانية Privatocent. و لم تكن جامعة هاله كبقية الجامعات الألمانية الأخرى ذات السمعة والصيت المرموق رغم شهرتها في مجال الرياضيات إذا ما قورنت بجامعتي غوتنجن وبرلين.

لقد اقترح عليه زميل كانتور هرنيش أدوارد هاينـــــه H.E.Heine الذي كان يشتغل في نظرية المتواليات المثلثية الاشـــــتغال بـــإحدى المسائل العويصة المتعلقة بتميز هذه المتواليات أو تفردها (توحدهـــــا) Uniqueness . وفى عام 1872 عندما كان كانتور في ربيعـــه الســـابع والعشرين نشر بحثه حول الحلول العامة لهذه المسألة والتي تعد بمثابـــة البذرة الأولى لنظرية المجموعات اللانهائية .

إن المسألة التي اقترحها زميله هاينه برزت مـــن خـــلال أعمـــال الرياضي الفرنسي الشهير جين فورييه J.Fourier حيث برهن فورييـــه في عام 1822 أن الرسم البياني لمنحنى "دقيق جدا" (أملـــس – هـــو المنحنى الذي يوضح أعداداً من النقط المتناهية غير المتصلة) يمكن تمثيله على مدى الفترة كمجموع لمتوالية مثلثية لانهائية. و بتعبـــير آخـــر تتطابق أعداد لانهائية من موجات الجيب و الجيب تمام، فأية نقطـــــة على المنحني الدقيق جداً (الأملس) عدا نقاط التقاطع يمكن تقريبها إلى درجة من الدقة حسبما نشاء ويقال عندئذ بأن المتواليات متقاربـــة إلى المنحني أو إلى دالة عدا أعداد متناهية من النقط أينما تكون .

ورغم أن نظرية كانتور لاقت العديد من المعارضين ولكنه توصل فعلاً إلى أن يجعل المنطق الرياضي يتجدد ويصبح أكثر قوة وصلابـــة، كان برتراند رسل Russell أحد مؤيديه، و قال رسل مادحاً ومبجلاً انجازات كانتور "بأنها أعظم الإنجازات التى يفتخر بها العصر".

في عام 1874 تزوج كانتور فالي كوتمان Vallay Guttman وقضى العروسان صيفهما على جبال هارتز Harz وهناك التقيا بالرياضي ديدكن Dedkind وكان هذا اللقاء مثمرا بالنسبة إلى كانتور لأنه ناقش المسائل الرياضية التي كانت تشغله، فقبل عام من زواجه كتب إلى ديدكن خطابا استعرض فيه إحدى المسائل التي كانت تشغله في موضع اهتمامه ذكر فيها: "هل بالإمكان تطابق نقط سطح ما (مربع ومن ضمنه نقط حدوده) مع نقط الخط المستقيم (من ضمنها نقطتي البداية والنهاية) أي أن أية نقطة على السطح تناظرها أخرى على الخط المستقيم وبالعكس؟ وبالتعاون مع ديدكن أعطى كانتور الشكل النهائي لنظرية الأعداد الحقيقية بغية تحويل التحليل الرياضي إلى حساب، أي لاستخراج تعريف الأعداد الحقيقية من مفهوم النهاية، فانطلق من مبدأ التقابل Bijection ومنه توصل إلى نظرية الرتب المتصاعدة .

2. خصوم كانتور : القطيعة الكبرى مع ليبولد كرونكر:

لقد كان عرض "الأسس" Grundlagen عرضاً رياضياً دقيقاً حول المجموعات الجديدة للأعداد الموغلة بالإضافة إلى الدفاع المحصن عن اللانهائية الحقيقية، ذلك المفهوم الذي حاولوا معظم الفلاسفة واللاهوتيين وحتى الرياضيين أنفسهم على دحض مفهوم اللانهائية الحقيقية وبالأخص عندما حذر الفلاسفة في منطقهم المتشدد

حول المفارقات الموجودة فى طبيعة اللانهائية و سلوكها الغريب منذ ما قبل السقراطيين عندما بدأوا اكتشاف أشكالها المتناقضة. وعلى سبيل المثال رفض أرسطو مفهوم اللانهائية الكاملة و بالمثل دحض رجال الدين المسيحي اللانهائية الحقيقية باعتبارها هجوماً مباشراً وتحدياً لوحدة الله المطلقة وطبيعتها اللانهائية .

وحدث الأمر نفسه بالنسبة للرياضيين عندما سلكوا مسار الفلاسفة حيث اعوج سبيلهم تجاه تطبيقات اللانهائية الحقيقية ومن هذا النزاع اشتد غيظ الرياضي الكبير فريدريك جاوس Gauss وعبر عن وجهة نظره هذه في رسالة كتبها إلى هنيرش شوماكر Heinrich Schumacher مصرحا احتجاجه على مثل هذه اللانهائيات قائلا :

"بالنسبة إلى برهانك، فإننى أعترض بشدة على استخدام اللانهائية ككمية متكاملة فهي مرفوضة بتاتاً في الرياضيات، فاللانهائية ليست إلا شكلا بل تعبيراً لفظياً فحسب facon de parler . "

لقد كان كانتور يعلم كل العلم بأن نظريته الجديدة حول المجموعات اللانهائية والأعداد الموغلة ستلاقي حتما معارضة شديدة وهذا بالتأكيد لما تمثله نظريته من إزاحة الاعتقاد التقليدي السائد – وهذا مصير أية فكرة جديدة– لذا كان أحد أهداف "الأسس" هو إثبات أنه ليس ثمة سبب لقبول الاعتراضات القديمة حول اكتمال اللانهائية الحقيقية و من الممكن أيضا الإجابة على هؤلاء الرياضيين

أمثال جاوس والفلاسفة أمثال أرسطو واللاهوتيين كتوماس الأكويني سيجدون أنفسهم في وضع معين وفي يوم ما غير قادرين أن يرفضوا تلك الفكرة لأن كانتور نفسه لم يتطرق إلى القضايا المعرفية للأعداد الموغلة فحسب بل إلى التصورات الميتافيزيقية المصحوبة بها لأن هذه التصورات بمثابة الروح النابضة في أية فلسفة.

لقد كان كانتور مدافعاً عن الأساس الرياضي ومؤكداً شرعية النظرية الجديدة محاولاً أن لا يترك أية ثغرة، هكذا كان يشعر بأنه مجبر كي يدافع عن عمله من أي شكل من الهجوم وبأي مستوى وكان مستعدا لمواجهة الاحتجاجات الفلسفية والدينية التي ربما تبرز من تناول مفهوم اللانهائية الحقيقية .

إن تفاصيل برنامج كرونكر حول "التحسيب"Arithmeticisation الهادف إلى أن الرياضيات برمتها ما هي إلا أعداد نهائية من العمليات تتضمن فقط الأعداد الصحيحة، تم تلخيص هذا البرنامج في مقاله الموسوم " حول مفهوم العدد" Uber den Zahlbegriff وكما ذكرنا سابقاً أن كانتور كتب أطروحته تحت إشراف كرونكر وذكرنا أيضا بأن أعمال كانتور التي نشرت عام 1878 حققت له نصراً عظيماً وجعلته يقف فى مقدمة رياضيي عصره، هذا النصر سرعان ما خفت بريقه وتحول إلى جحيم. بدأ خصومه يشنون حربا لا هوادة ضده وبدأت القطيعة الأولى مع أقرب أصدقائه ومعلمه

وأستاذه بجامعة برلين ومحرر مجلة كريلة Crelle، الرياضي الآنف الذكر ليبولد كرونكر .

لم يدرك كانتور وضعه المتطرف فى الوقت الــــذى كـــان فيـــة كرونكر يجمع قواه فى بداية 1870 لمعارضة مفاهيم نظرية بولزانـــــو- فيرشتراس Bolzano-Weirstrass حول النهايات، النـــهايتان القصـــوى والدنيا وكذلك الأعداد الصماء . وكون كرونكر محـــرراً للدوريـــة الآنفة الذكر فقد كان باستطـــاعته أن يرفض أي بحث يرسل للنشـــر أو يجمده حتى و إن كانت هناك محاولة من قبله لعدم نشـــر أعمـــال هاينه Heine لعام 1872 ولكن هاينه لم يعرقل فيما بعد.

وأوشك الأمر نفسه أن يحدث مع كانتور عندما أرسل بحثـــه في الثاني عشر من يوليو عام 1877 لم ينشر فى الحال كما كان توقعه رغم وعود المحررين الآخرين بقبوله وجهود فيرشتراس المضنية إلا أنــــه لم يحدث أي شيء يذكر حول نوايا كرونكر. شعر كـــانتور بخطـــورة الوضع وخشي تدخل كرونكر في الموضوع، حينـــها كتب رســـالة مرة إلى صديقه ديدكن Dedkind يشكو حاله وما تلاقيه أعماله مـــن سوء المعاملة مقترحاً الانسحاب، إلا أن حكمة ديدكن خففت وطـأة الانفعال وألح عليه الصديق بعدم الانســـحاب وبـــالالتزام بالصـــبر وبالفعل فقد كان صديقه مصيباً حيث ظهر البحث في 1878 واتضـــح

لكانتور بأن مماطلة كرونكر ليست أكاديمية صرفه وإنما شخصية فحسب .

ومن منطلق شخصي بحت لم يرد كرونكر أن تنشر أعمال كانتور لأنه كان يرفض مفهوم اللانهائية الحقيقية أو المكتملة وكذلك الأعداد الموغلة. لقد كانت الحملة التي شنها كرونكر مشحونة بالغيرة على حد تعبير إسحاق اسيموف Asimov .

وكان كرونكر دوما معارضا له، بل كان يبذل جل اهتمامه وجهده في عرقلة تقدم كانتور وإبعاده عن سلك التعليم بجامعة برلين حتى دفعه إلى ترك برلين والالتحاق بجامعة هاله وهناك بدأت تظهر عليه نوبات الانهيار العصبي وعلى أثرها ادخل مستشفى الأمراض العقلية ومكث فيه ثمانية أعوام حتى وفاته.

وأخيراً من هذا الخليط الدولي الذي يسري في عروق كانتور من أب دنماركي وشهادة ميلاد روسية إلى العيش حتى نهاية حياته في ألمانيا بوسع أية دولة أن تتبنى هذا العبقري مواطنا فيها وابنا بارا لها، و لكن كانتور نفسه فضل ألمانيا ولا نستطيع أن نجزم ما إذا كانت ألمانيا قد فضلته بالمقابل؟؟؟

الفصل الثاني

مفهوم اللانهائية قبل كانتور

مفهوم اللانهائية قبل كانتور

" ما هو ذلك الشيء الذى لا يبدو للعيان و إذا بدأ يكون غير موجـود ؟ إنه اللانـهائية ". *

ليوناردو دافنشي

لقد بدأت مسألة اللاهائية من تعريف طاليس[1] Thales الذي قال فيه "تلك التي ليس لها بداية أو هاية"، ومنذ ذلك الحين بدأ هناك تأثـيران أساسيان يلعبان دورهما في مفهوم اللاهائية، الأول تخميني أو حدسـي وهو التيار الذي انطلق منه انكسـمندر Anaximandar (610-546 B.C) المالتيسي، أما الآخر فتمثله المدرسة الفيثاغورية عن طريق اكتشـاف أصحاها "المسألة اللاقياسية" التي أدت هم أخيراً إلى مفهوم الأعـداد الصماء Irrational Numbers .

ومن ناحية تاريخية يمكن القول إن مسألة اللاهائية في الفكر الغربي بدأت بمراحل ثلاث، الأولى ويطلق عليها "ما قبل الأرسطية" وهـي جميع الأفكار الفلسفية والرياضية التي سبقت أرسطو والثانيـة هـي المتمثلة في تحليل اللاهائية عند أرسطو نفسه وبعض شارحيه وهـي المرحلة " الأرسطية" أما المرحلة الأخيرة فهي متمثلة في أعمال كانتور

---

* ترجمة كاتب هذه السطور

[1] نود أن نشير هنا إلى أن بعض الحضارات التي تسبق اليونانية كانت تعرف مفهوم اللاهائية ووردت في أدبياها كالهندية مثلا .

وآخرين. وسيكون التركيز هنا على المرحلة الأخيرة مع الإشارة الخاطفة إلى المرحلة الأولى المتمثلة في المدرسة الفيثاغورية التي برز فيها الإطار العلمي بوجه عام والإطار الرياضي بوجه خاص، أما بالنسبة إلى المرحلة الأرسطية فيغلب عليها الطابع الفلسفي المحض.

لقد مهد فيثاغورس Pythagoras (582-497ق.م) الساموسي وتلامذته الطريق إلى مسألة اللانهائية والتي تعتبر بحق فصلا من فصول تاريخ الرياضيات، إن لم تكن الرياضيات برمتها هي علم اللانهائيات « هذا ما عبر عنه الرياضي الشهير هلبرت Hilbert جاءت المسألة من خلال اكتشاف الفيثاغوريين لمسألة اللاقياسية Incomensureablity والتي تعتبر بحق انعطافا حادا لتعاليم المدرسة الفيثاغورية وذلك ما أجبر فيلسوف الرياضة والمنطقي برتراند رسل Russell أن يعبر أجمل تعبير عندما قال "إن مسألة اللانهائية بدأت أول الأمر عند الفيثاغوريين فى محاولاتهم للمسألة اللاقياسية". وحتى أرسطو نفسه صرح بذلك قائلا "أنه فيثاغورس الذي وضع اللانهائية بين الكينونات المحسوسة الأخرى" .

هكذا جاء اكتشاف الفيثاغوريين عند التعويض عن أضلاع المثلث القائم الزاوية بالوحدة، فإن الوتر عندئذ سيكون مساويا للجذر التربيعي للعدد اثنين (لنفرض المثلث abc القائم الزاوية في b، فإذا كان ab=bc =1 فإن الوتر ac يساوي $\sqrt{2}$ وذلك بناء على نظرية

فيثاغورس الشهيرة التي تنص على أن المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين. ونتيجة تطبيقاتهم الهندسية فأن العدد يجب أن يكون صحيحاً (فمثلاً إذا كان الضلعان ab= 3 و bc=4 يساويان فإن الوتر ac=5 يساوي وهكذا ...

ولكن الكارثة تبدو عندما يكون الناتج $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$ أو أي جذر تربيعي آخر غير تام (الجذر التربيعي التام مثلا $\sqrt{9}$، $\sqrt{36}$ ... الخ) لقد كان هذا العدد الناتج أكبر صدمة بالنسبة إلى برنامج وتعاليم المدرسة الفيتاغورية إن لم يكن تحديا بالمعنى الذي يجبر المدرسة على تصحيح بعض مفاهيمها أو التغلب على مثل هذه الصعوبة، ولكن تلامذة المدرسة اتخذوا أسلوباً آخر وهو كتم السر واعتباره من الأسرار المقدسة ويعاقب من يبوح بذلك لأن إفشاء مثل هذه الأسرار يعنى انهيار كامل للمدرسة نفسها التي تقف وراء شعار" العدد هو أصل كل شيء" ويجب أن يكون العدد صحيحاً وهذا ما أثبتته لهم التجربة والقياس والحدس أيضا، لأن اكتشافهم هذا خال تماما من اللوغوس Logas – أي العقل– وأن هذه الأعداد غير صحيحة تماماً ومن ثم تتنافى مع العقل.

إذا كانت الأشياء يمكن التعبير عنها بالأعداد الطبيعية ج، د مثلاً فإن التناسب ا : ب = ج: د حيث ج، د هما النسبة بين ضلع المربع و قطره و يمكن البرهنة أيضا على أن أعداداً طبيعية كهذه لا يمكن أن توجد، فالنسبة فى حد ذاتها غير صحيحة ومن ثمة لا تحمل

اسما على الإطـــلاق فلتكن اللانهائية ذاتها Aperion وقيـــل أيضا إنها a logas أي غير قابلة للتعبير وباليونانية آرتوس arratos أي دون نسـبة. و لقد تم أخيرا البرهنة على أن هذه الأعداد التي يطلق عليها الأعـــداد الصم (غير المنطقة) ليس إلا سلسلة لانهائية من الأعداد الصحيحـــة. هذا بالإضافة إلى أنه تم البرهنة أيضا على وجود الأعداد الصماء مـــن خلال طول أضلاع المربع وقطريه، ومن هذا المنطلق استبدل التصـــور الفيثاغوري بمفهوم الاستمرارية وهو أن كل خط مســـــتقيم يمكـــن تقسيمه إلى ما لانهاية من الأجزاء وعدد نقاطه تكون لانهائية أيضا .

إن مفـــارقات زينو Zeno (450-؟ ق.م) الأيلي الشهيرة الــــتي تقوم على فرضية كل من الزمان والمكان قابل للتقســـيم اللانهـــائي. واستنادا إلى المؤرخ الرياضي الأمريكي الشهير فلوريـــن كـــاجوري Cajori فإن تاريخ هذه المفارقات ليس إلا تاريخا لمفاهيم الاســـتمرارية واللانهائية. فهذه المفارقات تتعارض مع المفـــاهيم التقليديـــة حـــول اللانهائية في الكبر و كذلك اللانهائية في الصغر التي تزعم بأن مجمـــوع المقادير اللانهائية يمكن أن تتضاعف حسب ما نشاء حتى إذا كـــانت الكمية المضافة صغيرة جدا وبالرموز وبلغة رياضية ∞ .

لقد كانت انتقادات زينو أكبر تحد لتلـــك المفـــاهيم ومـــا مفارقاته الأربع الشهيرة إلا بلبلة فكرية لتلك المفاهيم. تنص المفارقـــة (أحجية) الأولى: "إذا كانت هناك كثرة فهي يجـــب أن تكـــون لا

متناهية الصغر ولا متناهية الكبر. إن الكثرة يجب أن تكون متناهية الصغر لأنها مركبة من وحدات و هذا ما نقصده بقولنا إنها الكثرة".[1]

المفارقة الثانية تقول" حتى يمكن لجسم أن يقطع المسافة يجب أولا أن يقطع نصف المسافة، ولا يزال هناك نصف النصف لقطعه ثم نصف نصف النصف وهكذا إلى ما لانهاية ومن ثم سيظل دائما جزء لم يقطع وعلى هذا يستحيل على الجسم أن ينتقل من نقطة إلى أخرى ومن ثم لا يمكن أن نصل "[2].

والثالثة حول السباق بين أخيل و السلحفاة " فإذا كانت السلحفاة سابقة على أخيل فإنه لن يستطيع أن يلحقها(يدركها-إضافة)، فلولا يجب أن يصل (أي لن يصل إلى النقطة التي انطلقت منها السلحفاة -إضافة) إلى النقطة التي انطلقت منها السلحفاة وعندما يصل إلى هناك تكون السلحفاة قد انتقلت أبعد ومن ثم فعلى أخيل أن يصل إلى تلك النقطة وسيجد أن السلحفاة قد وصلت إلى نقطة ثالثة وسوف يستمر هذا إلى الأبد ومن ثم فإن المسافة بينهما تتناقص باستمرار لكنها لا تجتاز (تقطع) كلية، ومن ثم لن يلحق أخيل بالسلحفاة على الإطلاق ". بمعنى " يظلان إلى ما لا نهاية، فلو ظل المتسابقان إلى آخر الدهر فلن يلحق أخيل بالسلحفاة [3]".

يرى الرياضي التشيكي بولزانو Bolzano أن فكرة اللانهائية مجردة من السلب، لأنها خرجت من فكرة النهائية نفسها وكما يقول "إننا

1، 2، 3 الشيخ كامل عويضة: زينون، وما حققته الفلسفة اليونانية.

نضع اللانهائية كنقيض للنهائية نفسها ". وتعريف -اللانهائية- الذي قدمه لنا بولزانو واستخدمه كانتور فيما بعد ينص على الآتي: اللانهائية أو اللانهائي هي تلك التي تكون قادرة على أن تخضع لعلاقة التطابق واحد-إلى-واحد الكل مع الجزء نفسه .

ولكن أول من أدخل رمز اللانهائية (∞) هو الرياضي الإنجليزي جون والس John Wallis (1616-1703) ويطلق عليه " عقدة الحب المعقوفة" والغرض من هذا الرمز يكمن في الحقيقة التالية وهي أنه بإمكانك الدوران اللانهائي حول هذا المنحنى بصورة مستمرة، هذه هي اللانهائية بعينها، بينما قدم لنا كانتور الرمز (ℵ) وهو الحرف الأول في الأبجدية العبرية ويلفظ ألفا كالعربية وهو أيضا أول عدد لانهائي ضمن أعداد كانتور اللانهائية .

لقد كان رياضيو وعلماء القرن السابع عشر يتحدثون عن مفهوم اللانهائية ولكنهم لم يدركوا حقيقية هذا المفهوم الغامض و لم يدركوا أيضا إنه فى يوم ما ستكون اللانهائية مفهوما صحيحا وحقيقيا رغم انه لا يزال عند البعض الآخر عبارة عن مصطلح يستخدم لوصف أي كمية كبيرة لا يمكن إدراكها .

فجاليليو Galilio مثلا يرى أن المجموعات اللانهائية متساوية أي أن عدد نقط الخط المستقيم تساوي عدد نقط خط مستقيم آخر، لأن

كليهما لا نهائيان وأن فكرة أن أحدهما أكبر أو أصغر من الآخر غير واردة في واقع اللامتناهيات فجميعها متكافئة بل متساوية.

هذه هي الشرارة الأولى التي انطلق منها كانتور والتي ستكون محور حديثنا عن أعمال هذا الرياضي الفذ التي أصبحت نظريته حجر الزاوية لكل فرع من فروع الرياضيات. فكانتور يعتبر أية مجموعتين لانهائيتين متساويتين إذا خضعتا إلى قاعدة المطابقة واحد-إلى -واحد فقط وخلاف ذلك تكون إحداهما إما أكبر أو أصغر من الأخرى .

إن تعريف جاليليو دون شك أنار الطريق ورسم الفكرة الأساسية لرياضيي العصر الحديث وبالذات إلى مفهوم اللانهائية الحقيقية Actual Infinite ومنطلق أسلوب جاليليو هو استنباط المجاميع الكلية للأعداد على أنها لانهائية وبالمثل بالنسبة إلى مربعات الأعداد نفسها، و يمكن توضيح ذلك بالرموز كالآتي:

$$1, 2, 3, \quad \dots \qquad \infty$$

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad \dots \qquad \infty$$

وجاءت وجهة نظر ليبنتز Leibenz حول اللانهائية الحقيقية من خلال رسالة كتبها إلى صديقه فوخر Faucher في عام 1693 قائلا: أنني ميال كثيرا إلى فكرة اللانهائية الحقيقية، لذا أعتقد بأن ليس هناك جزء من المادة -لا أقول- غير قابل للانقسام ولكن يمكن تقسيمه فعلا".

وتفهم ليبنتز لمفهوم اللانهائية الحقيقية ناجم عن فلاسفة العصور الوسطى وبالذات كاستوسا برونو Bruno وكما اقترح رسل أن مفهوم اللانهائية لدى ليبنتز شبيه بتلك اللانهائية التي أطلق عليها هيجل " اللانهائية الكاذبة" وما اللانهائية الحقيقية في نظر هيجل إلا العقل نفسه.

فاللانهائية في الرياضيات هي اسم يطلق على أي شيء- كمية- لا يمكن أن يتصورها العقل، لهذا السبب هناك العديد من الرياضيين ممن وقف ضد فكرة اللانهائية أو حتى التفكير بها لأن ذلك يعني بالنسبة لهم غير كامل أو مكتمل - اللااكتمال- بينما يرى فريق آخر على إنها مفهوم كامل ومحدد ومن أنصار هذا المفهوم هو جورج كانتور، الذي تشكل محاولاته انعطافا حادا في تاريخ العلم وفى نظرية اللانهائيات وما أتى به في الواقع ليس إلا ثورة حقيقية في عالم الرياضيات، لقد هذب اللانهائية وصقلها ثم وضعها في عالم المحدود والمحدد واليقين بدلا من عالم اللامحدود واللامعين، لذا جاءت دراستنا هذه تاريخا لحياته وإبرازا لأعماله .

وهكذا جاءت نظرية كانتور لتكون تتويجا لأفكار عصره حول مسألة اللانهائية التي حجبها التأثير والتحليل الأرسطي الذي أغرقها في محيط اللامحدود واللامتعين. فاللانهائية من وجهة نظر شارحها الأول أرسطو تكون غير مكتملة إطلاقاً فهي جهدية ومحتملة

فقط بينما يرى كانتور العكس تماما فهي أي اللانهائية تبرز عنده في شكلين مختلفين، لانهائية غير تامة، تتجاوز حدود الكميات في الكبر والصغر ولكن تبقى نهائية ويمكن أن يقال عنها "متغير نهائي" وهذا ما يطلق علية "اللانهائية الممكنة" Potential Infinite والأخرى كمية محددة، ثابتة يمكن تصورها بمفاهيم مختلفة في الهندسة وفى نظرية الدوال بنقطة لانهائية في المستوى المركب، هذه هي اللانهائية الحقيقية Actual Infinite.

لقد أصبح كانتور واحدا من رواد رياضيي القرن التاسع عشر بجانب ريمان Riemann وهنكل Hankel وهارنك Harnak وبوس ريموند Bois Reymond وآخرين الذين انصبت أعمالهم حول خصائص نقطة المجموعة Point set وآفاقها بالنسبة للتحليل الرياضي وكانت مساهمة كانتور متميزة وفي غاية الروعة.

وانصبت أعماله حول تأسيس البناء الراسخ للأعداد اللانهائية التي أطلق عليها "الأعداد الموغلة" Transfininte numbers، وكانت موضع نقاش وجدال شديدين منذ بدايتها ولذا كانت جهوده موجهة بالفعل في الدفاع عن هذه المفاهيم الجديدة وثم المحاولة الجادة في تطويرها ومن هذا المنطلق اتسمت أعماله بالجدة والأصالة والثورية.

ويمكن أن يقال أن أكثر فروع الرياضيات الحديثة تعتبر نظرية المجموعات هويتها الأصلية التي تنطلق منها كأساسيات لفهم

موضوعاتها، وما التطور التاريخي لنظرية المجموعات الكانتورية إلا برهان عقلي لهذه الحقيقة.

و السؤال المطروح حاليا، كيف تكون الموضوعية المجردة التي تنسب إلى النظرية العلمية الجديدة تؤثر على مطوري ومبدعي هذا الفرع من المعرفة؟

الإجابة طبعا في غاية التعقيد المنطقي والابستيمولوجي وهذا ما حدث بالفعل في مضمون اللانهائية في الرياضيات التي ناضل كانتور من أجله ودافع عنه طوال حياته وعانى الكثير وواجه معارضة شديدة من معاصريه الرياضيين بل وحتى من الفلاسفة واللاهوتيين، جميعهم رفضوا فكرة اللانهائية الحقيقية ونبذوها تماما ولسنا نعلم لم هذا العداء و لم هذه المعارضة ألم يعلموا أنه في يوم ما ستكون هناك تطبيقات لا تحصى لهذه النظرية، أنني لا أجد أي تبرير سوى مرضهم الفكري البائت .

الأعداد الصماء واشتقاق المجموعات :

كانت أطروحة كانتور لعام 1867 التي كتبها في جامعة برلين تحت إشراف كل من: كومر Kumar وكرونكر Kronecker تتعلق بمسألة شاقة في نظرية الأعداد ذلك الفرع الذي لم يثر حماسه لنظرية المجموعات ورغبته فيها. ففي عام 1869 ترك برلين ليشغل منصب

أستاذ بجامعة هاله Halle وهناك وجد زميلـــه إدورد هاينـــه E.Heine الذى كان يبحث فى مشكلة تتعلق حول نظرية المتواليات المثلثية .

لقد اعترف هاينه بكفاءة وقدرة كانتور العلمية والرياضية ووجد فيه العزم الصادق كي يتناول موضوعا كهذا، وبالفعل شـــجعه وألح عليه أن يعالج إحدى المسائل المهمة في التحليل الرياضي وهـــي: أن افتراض أية دالة (اختيارية) يمكن تمثيلها كمتوالية مثلثية ذات نمـــط وحداني؟

استطاع هاينه في عام 1870 أن يجيب عن جزء من هذه المشـــكلة وذلك بافتراض أن الدالة الاختيارية مستمرة أينـــما كانت، وبـــالمثل فإن المتوالية المثلثية تكون تقاربية منتظمة أينما وجدت. وكانت مثابرة وحماسة كانتور تدوران حول إيجاد الحل الحاسم لهذه النظرية وهـــو وحدانيتها Uniqueness.

هذا ما انجزه كانتور بالفعل فى مبرهنة الأولى لعام 1870 ووجـــد من الضرورى أن يفترض أن المتوالية المثلثية تقاربية لجميع قيـــم (x). وفى عام 1871 نشر ملاحظة مختصـــرة تبين على أنه يمكـــن صياغـــة نظرية أخرى لقيم محددة ل (x) إما تمثيلا للدالة أو تخليا عن المتواليـــة التقاربية طالما يبقى مجموع النقط الاستثنائية محدودا أي نهائيا .

جاءت أهم إنجازات كانتور في عام 1872 عندما برهن بنجاح على أنه حتى الأعداد اللانهائية من هذه الاستثناءات يمكن أن يسمح لهـــا

طالما يمكن توزيعها بصورة محدودة و يمكن توضيح إثباته الأخير بصورة مبسطة قدر الإمكان . لقد وجد كانتور نفسه مقتنعا كل الاقتناع بتطوير نظرية للأعداد الحقيقية وذلك عن طريق التعامل مع المجموعات اللانهائية للنقط المستثناة التي في حوزته، منتقدا في ذلك الأعداد الصماء باعتبارها "نهاية" لسلسلة لانهائية من الأعداد الصحيحة.

لنأخذ الأعداد الصحيحة(A) التي هي سلسلة من الأعداد $a_1,a_2,a_3,...a_4$ هذه المتوالية تخضع للشرط الآتي: لأي عددين m و n مهما كان n كبيرا، فإن المتباينة K_ε $A_{n+m} - A_n$ I حيث ε عدد صحيح صغير جدا ولكنه أكبر من الصفر. أطلق كانتور على هذه المتوالية التي تحقق الشرط " بالمتوالية الأساسية" ويقال أيضا إنها ذات نهاية محدودة (b)، و على المجموعات (b) المرتبطة بالمتوالية اللانهائية An بالرمز B.

أي عددان b و' b معرفان بالمتوالية a و a يقال أنهما متساويتان ' b = b إذا كان 'a-a يؤول إلى كمية صغيرة جداً هي (V) وتكون فى ازدياد مستمر بلا حدود . اعتبر كانتور المتوالية اللانهائية لعناصر B ب b ,.... b , b , b و لكل متوالية أساسية bn يوجد عدد مرتبط بها هو c ، هكذا انطلق كانتور من هذه الخلفية ليعرف رتب أعلى من c .

استطاع كانتور أن يجعل أعدادا أخرى من B و A، باستخدام المتواليات اللانهائية وعلى نفس النمط السابق توصل إلى رتب أخرى أعلى درجة - رتب متزايدة- ولكن المشكلة التي واجهته في تحديد الأعداد الحقيقية المتمثلة بنقط الخط المستقيم ؟ من الواضح جدا إن أية نقطة على الخط المستقيم تناظر أو تطابق عددا حقيقيا ولكن السؤال هنا أي عدد من B يناظر نقطة على الخط المستقيم؟ لذا استدعى كانتور البدهية الآتية: لكل عدد حقيقي تناظره نقطة محددة على الخط المستقيم حيث تكون إحداثيتها تساوي العدد نفسه .

وقبل نهاية عام 1873 استطاع كانتور أن يكتشف السر الكامن وراء طبيعة مسألة الاستمرارية، ففي عام 1874 نشر نظرية هامة فى المجلة الدورية كريله Crelle تنص على : إن مجموعة الأعداد الحقيقة R لا يمكنها أن تكافئ/ تناظر واحد-إلى-واحد مع الأعداد الطبيعية N.

وبتعبير آخر فإن المجموعةR غير قابلة للعد إذن non-denumerable ويمكن إثبات نظرية كانتور بالخطوات الآتية:

لنفرض أن الأعداد الحقيقية (ω) قابلة للعد - أى يمكن وضعها على صورة تناظر واحد-إلى - واحد مع الأعداد الطبيعية

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \ldots\ldots \omega_n \ldots\ldots$ ①

و في أية فتره مقفلة [a,b] تنتمي إلى R يمكن الحصول على عـــدد حقيقي η في R وبالرموز فإن η ∈ R

و إن η لا يمكن وضعها ضمن المتوالية ①

لنفرض أن $a < b$ ، ولنأخذ أي عددين بحيث يكونا ضمن الفـــترة المقفلة [a,b] ولنرمز إليهما ب `a و `b ، فهذا بالتالي يشكل فترة أخرى ولتكن [`a`,b] وبالاستمرار على هذا النحو ، توصــــل كـــانتور إلى متوالية من الفترات المقفلة أطلق عليها الفترات العشية nested Internal وهى على صورة $\left[a^n, b^n\right]$ حيث a^n , b^n

أول عددين من المتوالية (1) يدخلان ضمن الفترة $\left[a^{n-1}, b^{n-1}\right]$.

فإذا كان عدد الفترات متناهيا، فإنه على الأغلب هناك عدد واحـــد يمكن أن تحتويه الفترة $\left[a^n, b^n\right]$.

وببساطة يمكن أن يستنتج أن العدد ع المأخوذ من الفـــترة غـــير مدرج ضمن قائمه المتوالية (1) فأي عدد حقيقي ينتمي إلى الفـــترة المقفلة $\left[a^n, b^n\right]$ سيفي بالغرض طالما لا يمثل العدد الأدنى المذيـــل في المتوالية(1) .

وبصورة أخرى إذا كان عدد الفترات $\left[a^n, b^n\right]$ غير نهائي فإن جـــدل كـــانتور ينتقـــل إذا إلى مفـــهوم النهايـــة حيـــث أي المتواليـــة $a, a'a'', \ldots\ldots, a^n$ لا تتزايد بدون حدود ، ولكنها محصورة ضمـــن

$\left[a^{n},b^{n}\right]$ ويمكن اقتراح حد أعلى يرمز له $\left(a^{\infty}\right)$ وبـــالمثل بالنســبة للمتوالية $b,b',b'',....b^{n}$ يمكن أن نحدد لها حداً أدنى b^{∞} حيث $a^{\infty}<b^{\infty}$ (الحد الأعلى أصغر من الحد الأدنى)كمـــا الحـــال (ξ) في عالم النهايات ، أي عدد حقيقي ينتمي إلى $\left(a^{\infty},b^{\infty}\right)$ فأنـــه يكفي أن نأتي بالضرورة بعدد حقيقي غير مدرج في المتوالية (1) .

ومهما يكن من الأمر فإن $a^{\infty}=b^{\infty}$.

لقد أقترح كانتـــور على أن العدد الحقيقـــي ξ يســـاوي b^{∞},a^{∞} الذي ليس بعنصر في المتوالية (1) وكما أفترض أن η ضمن الفـــترة $\left[a^{n},b^{n}\right]$ وهذا نقيض لما تم البرهنة عليه، ويستنتج على أن مجموعـــة الأعداد الحقيقية (R) غير قابلة للعدد .

الفصل الثالث

اللانهائية عند كانتور

اللانهائية عند كانتور

" إنني أراها ولكنني لا أصدقها "

كتب كانتور إلى ديدكن

تعتبر نظرية المجموعات والأعداد الموغلة أحد الإبداعات والإنجازات الرئيسة بل والمتميزة في أعمال كانتور تحديداً وفي تاريخ الرياضيات وفلسفتها بصورة أعم . وتعتبر أبحاث كانتور الأولى والتي هي سلسلة من الدراسات، بدأ مسارها منذ عام 1870 وكان محورها يدور حول المتسلسلات المثلثية. ولقد كان تحليل الدوال هو الحافز الذي دفع كانتور إلى فكرة " مجموعة النقط" Point set ومن ثم إلى اكتشافه الخالد" الأعداد الموغلة" أي أعداد ما وراء المنتهي.

لقد كانت أعمال كانتور المبكرة منصبة حول متسلسلات فورييه Fourier Series وهى المتسلسة المثلثية التي يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:

$$F= 1/2\, a_0 + \Sigma\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= 1/2\, a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

حيث $a_0\ a_1\ p\ a_2\ \ b_0\ b_1\ \ b2..$ أعداد ثابتة تسمى معاملات فورييه. وتستخدم هذه المتسلسلة لتمثيل أو تقريب أية دالة دورية

(دورها2π) وحيدة القيمة وذلك عن طريق تحديد قيم مناسبة للمعاملات.
ومعاملات فورييه هى :

$$a_n = 1/\pi \int f(x) \cos(nx)\, dx \qquad n \geq 0$$

$$bn = 1/\pi \int f(x) \sin(nx)\, dx \qquad n \geq 1$$

و F هذه ناتجة عن الدالة f (x) ومعاملاتها أو مع أي معاملات أخرى، ويمكن أيضا دراسة تقاربها [1] الذي يؤول إلى نهاية الدالة. فإذا تقاربت مثلا المتسلسلتان إلى نفس الدالة عند أية نقطة، فلتكن x في الفترة $(0,2\pi)$ فإن الفرق بينهما يؤول إلى دالة صفرية (f (x)=0). والمشكلة التي كانت مطروحة أمام كانتور هي كيفية إثبات أن المتسلسلة المذكورة وحدانية؟[2].

في عام 1829 نشر درشلت Dirichlet (1805-1859) مقالا حول تقاربية متسلسلة فورييه وكانت أبحاث فورييه وقتذاك تتعلق بموضوع التوصل الحراري وعن طريقها توصل إلى أن أية دوال معطاة (اختيارية) فإنه يمكن تمثيلها بمتسلسلات مثلثية ذات معاملات من نمط خاص عرفت فيما بعد "بمتسلسلة فورييه".

---

[1] متسلسلة تقاربية Convergent series: تكون المتسلسلة تقاربية إذا كان مجموع حدودها متقارباً عند حد ما أي تتقارب المتسلسة إلى مجموعها المحدد وليكن L إذا كان الحد النوني للمتوالية المكونة من المجاميع الجزئية لحدود المتسلسلة هي L.

[2] Uniquness هي المتسلسلة التي تؤول إلى نهاية واحدة فقط على مدى فترة محددة .

وعلى خطى فورييه طور كوشي Cauchy نتائج عدة على طريقته الخاصة ولكن ذلك لم يقنع درشلت لأن الأخير كان متحمسا لإيجاد القاعدة الصلبة والمتميزة لتلك المتسلسلة. وبرهن كوشي على أن حدود المتسلسلة تتناقص وتشكل متسلسلة تقاربية.

ففي عام 1870 أنجز كانتور أولى نتائجه المتعلقة بوحدانية الدالة، وهي، إذا كانت الدالة متصلة في فترة ما، فإن تمثيلها بوساطة المتسلسلات المثلثية يكون وحدانيا. أما أعماله الأخرى فكانت تدور حول متطلبات الدالة التي يجب أن تكون متصلة على مدى الفترة.

لقد بحث كانتور عام 1872 قضايا أكثر تعميما لنتائجه حول نظرية الوحدانية قادته إلى اكتشاف نتائج مهمة وهكذا تركزت أعماله في العام المذكور حول اقتراب F إلى دالة صفرية عند أية نقطة في الفترة $(0,2\pi)$ أما تشخيصه الدقيق لهذه المسألة فدفعته إلى صياغة نظرية محكمة وصارمة حول الأعداد النسبية(المنطقة) وبالذات عندما واجهته مسألة المجموعة التي تحتوي على عناصر لانهائية (أي أعداد لانهائية من النقط).

وهكذا استطاع كانتور أن يتوصل إلى المتتاليات الرتبية أو رتب للمتواليات، فالمجموعة (A) للمتتالية الأساسية هي تلك المتتاليات للأعداد النسبية ($a = a \; n = 1,2,3,...$) هذه المتوالية تقترب طبعا من معيار كوشي Cauchy الذي ينص على أن أية قيمة صغيرة محددة مهما كانت قيمتها شرط أن تكون أكبر من الصفر ($\varepsilon > 0$) فإن القيمة المطلقة للفرق بينهما سيكون اصغر من تلك القيمة ε و بالرموز ε $|a - b|$ حيث $\varepsilon \geq 0$ وحيث q , p أعداد صحيحة .

لقد أعطت دراسات كانتور حول المتسلسلات المثلثية بعدا آخـــر في مسار عمله بل تحولا أيضا في أفكاره، حيث شرع في التركـــيز علـــى العلاقات الموجودة بين نقط الاتصال ناهيك عن المتسلســـلات نفســـها. وكانت هذه خطوة رائعة في تقدم عمله وخاصة وصفه الدقيق لمجموعـــة النقط اللانهائية و الذي كان التحليل الرياضي معوله الأساسي في مســـألة اتصال نقط الإحداثي السيني. لذا اعتبرها كانتور بدهيات (موضوعـــة)، فأية نقطة على الخط المتصل يناظرها عدد، هذا العدد حقيقي - كي يمكن تميزه عن الأعداد التخيلية- وبالمثل أي عدد حقيقي تناظره نقطـــة علـــى الخط المستقيم.

إن الوصـــف الدقيق لمفهوم اتصال نقط الخط المستقيم و ارتباطـــه بنسق الأعداد الحقيقية الخاضع لمبدأ " التكافؤ" أو المطابقة واحد إلى واحد يعتبر أحد إنجازات كانتور المهمة في بحوثه المنشورة عام 1872 .
و لكن العوائق الرئيسة حول نظرية الأعداد الحقيقية هي وجود أعداد مثل π و$\sqrt{2}$ والتي يطلق عليها الأعداد غير المنطقة أو الصماء (خلافاً للأعـــداد المنطقة أو النسبية التي يمكن وضعها على صورة a/b حيث b لا تســـاوي الصفر).

و بناء على اقتراح كارل فيرشتراس أستاذه في جامعة برلين توصـــل كانتور إلى أن الأعداد الصماء يمكن تمثيلها بمتوالية/ متسلسلة لانهائية مـــن الأعداد المنطقة. فعلى سبيل المثال الجذر التربيعي للعدد اثنين 2 ويمكـــن وضعه على الصورة التالية: ....,1.41 , 1.4 ,1 وهكذا وعلى الســـياق

نفسه يمكن اعتبار جميع الأعداد الصماء نقاط هندسية على خط الأعداد الحقيقية مثل الأعداد المنطقة .

رغم مزايا المنحى الكانتوري المفعم بالمنطق المجرد إلا أنه يبدو شاقا على بعض الرياضيين الذين رفضوا الاستسلام إلى هذا المنطق الجديد لأنه يفترض مسبقا وجود مجموعات أو متواليات من الأعداد تحوي على عناصر لانهائية.

لم يكن كانتور آنذاك هو الوحيد الذي انكب على دراسة مسألة الاتصال بل هناك الكثير ومن بينهم زميله الرياضي الألماني ريتشارد ديدكن R.Dedkind . ففي عام 1872 نشر ديدكن تحليلا حول هذه المسألة التي اعتمدت أساسا على المجموعات اللانهائية ومن خلالها صرح ديدكن بالفكرة التي ساهم كانتور فيها مساهمة جبارة وأشاد بها.

فالخط المستقيم يحتوى على نقط لانهائية فهو أكثر عددا من مجال الأعداد المنطقة(النسبية)، فإذا أخذنا مثلا توزيع النقط على جزء صغير من الخط المستقيم تناظره (تكافؤه) نقط الأعداد المذكورة أو النقط الصحيحة بغض النظر عن طول هذا الخط أو ذاك فهناك في الواقع أعداد لانهائية من النقط. وخلاصة ملاحظة ديدكن هو أنه بالرغم من كثافة النقط الصحيحة rational points على الخط نفسه فهناك مجال لحصر أعداد لانهائية من النقط الصحيحة والنقط غير الصحيحة irrational مثل 2 الذي يقع بين الأعداد الصحيحة(المنطقة) .

وهذا بالطبع يترك فراغا وهذا الفراغ سيعرقل عملية الاتصال وعندئذ لن نحصل على الاستمرارية كما سبق وصفها .

إن النص الذي طرحه ديدكن خال من الشوائب بل يقدم لنا فهما واضحا عن فكرة الاتصال (الاستمرارية) ولكن يخفي في باطنه ملاحظات حرجة، منها إذا ما وجهنا إليه السؤال التالي: كيف تكون المجموعة اللانهائية من النقط في المنحنى المتصل أكثر من مجموعة الأعداد اللانهائية المنطقة؟ فإنه لن يجيب عن سؤالنا هذا بل سيلزم الصمت !!

لقد كانت مساهمة كانتور تدور حول هذه المسألة التي نشرت في عام 1874 في المجلة الرياضية Journal fur die reine und angewandte Mathematik والتي تسمى أيضا Crelle s journal وهي إحدى الدوريات المرموقة وذات الصيت الحسن آنذاك.

استخدم كانتور الأداة التي استعارها من جاليليو Galilio وحولها إلى أداة نفاذة للمقارنة في حل المتناقضات أو المفارقات التي ذكرت آنفا وذلك بمبدأ "التناظر أو التطابق" واحد إلى واحد، فهذا المبدأ يوضح لنا أيضا حجم أية مجموعة، فمثلا تعرف المجموعتين المتساويتين بالتالي : عندما تناظر عناصر المجموعة الأولى واحد إلى واحد عناصر المجموعة الأخرى يقال أنهما متساويتان .

برهن كانتور على أن الخاصية التي اعتبرها جاليليو مفارقة هي في الواقع خاصية طبيعية للمجموعات اللانهائية. وإن مجموعة الأعداد الزوجية تكافئ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكذلك الأعداد الفردية، لأن عملية المطابقة مستمرة إلى الأبد-أي تطابق عناصر المجموعة الأولى مع عناصر المجموعة الأخرى دون حذف أي عنصر من المجموعتين كلتيهما.

استطاع كانتور أن يوضح لنا طريقة بارعة حول هذه المعضلة، حيث إن مجموعة الأعداد المنطقة تتطابق أو تكافؤ بمجموعة الأعداد الصحيحة. فأي مجموعة من مجموعات النظام العددي يمكن وضعها على صورة واحد إلى واحد مع مجموعة الأعداد الكلية Whole numbers عندئذ يقال إن المجموعة قابلة للعد Dennumerable set .

أثبت كانتور أنه لا يوجد تطابق بين نقط الخط المستقيم و مجموعة الأعداد الكلية أي عندما لا يتحقق شرط المطابقة يقال على أن المجموعة غير قابلة للعد Nondenumerable وبرهان هذه القضية بالغ التعقيد وتم نشره عام 1874 ولسنا بصدد ذكره هنا .

و لكن الذي يمكن أن ندلي به في هذا الخصوص هو ما جاء في أعمال كانتور لعام 1891 حيث استهل برهان تلك المسألة بوجود تطابق تكافؤ بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد المنطقة (النسبية) وخطوات البرهان تدور حول إثبات الافتراض نفسه الذي يؤدى إلى تناقض- أي لا يوجد تكافؤ بين المجموعتين- ومن ثم فإن الافتراض الأساسي خاطئ لذا فإن التناظر سيكون مستحيلاً .

والآن لنرى كيف صاغ كانتور نظريته التي اعتمدت أساسا على المبدأ الرياضي المعروف بالاستقراء . والنظرية في حد ذاتها بسيطة من حيث الفكرة ومعقدة وطويلة من حيث المضمون، ولنبدأ جولتنا مع الأعداد الترتيبية أو المرتبة والمقصود بها هي الأعداد التي عندما نحدد الأول منها، ثم الثاني والثالث والرابع وهكذا.

هناك طريقتان للحصول على الأعداد الترتيبية:

أولا: إذا كان العدد الترتيبي هو a فإنه يمكن الحصول على العدد الآخر الذي يليه وذلك بإضافة العدد 1 فقط (أي a+1).

ثانيا : إذا كان لدينا متوالية معينة ذات رتب تزايدية، فإنه يمكن إيجاد العدد الترتيبي الأخير لهذه المتوالية والذي هو أكبر من جميع الأعداد التي تسبقه، ويعبر عنه بنهاية a (lim a).

العدد الترتيبي الأول هو الصفر وباستخدام الطريقة الأولى نحصل على: 0,1,2,3,....n ، وباستخدام الطريقة الثانية وذلك لإيجاد نهاية n (lim n) نحصل على العدد الترتيبي الأخير ω و هو الحرف الأخير في الأبجدية اليونانية و يلفظ أوميجا، فيكون لدينا إذن ω ...,n ...,0,1,2,3 وباستخدام الطريقة الأولى نحصل على: ..,0,1,2,3,....n,..ω,ω+1,ω+2 وباستخدام الطريقة الثانية lim ω+n نحصل على ω+ω أو ω.2 .

والسؤال الذي ربما يبدو غريبا هنا هو لم نهاية ω+ n و ω+ω و ω جميعها متساوية؟ هناك في الواقع طريقة واحدة في تعريف جمع وحاصل ضرب الأعداد الترتيبية اللانهائية كما هو الحال مع الأعداد الحسابية النهائية. و يمكن شرح ذلك بإيجاز كالآتي:

يمكن الحصول على العدد الترتيبي a+b عن طريق عملية العد حتى نصل إلى a وبالمثل نعد أيضا حتى نصل إلى b بينما العدد الترتيبي a.b يمكن إيجاده بالعد حتى a و b مضروبا في الصف، أي أن إيجاده هو الالتزام ب b وتصور a في آن واحد ممثلا تلك كمجموعة ترتيبية ولتكن، M و من خلال عملية التجريد يتم الحصول على العدد الترتيبي M=a.b، أما في حالة الأعداد الترتيبية النهائية فيمكن تطبيق القاعدة التبديلية (وهي التي تنص على أن النتيجة واحدة بغض النظر عن ترتيب

المتغيرات فمثلا عملية الجمع تبديلية ولكن عمليه الطـــرح غير تبديلية أي $a+b \neq b+a$ ولكن $a-b \neq b-a$ و لكن في عا لم اللانهائيات فهذه القاعدة لا طائل منها، وهكذا فإن $1+\omega$ هو عبارة عن ω نفسه ولكـــن $\omega+1$ هو عدد آخر يلي ω .

فمثلا $\omega \;=\; 2.\omega = 2+2+2+\ldots$

$$\omega+\omega \;=\; \omega.2 = \omega + \omega$$

$\omega.2$ عبارة عن زوج من الاميجا معاً، الأولى بعد الأخرى والذي يعطـى الترتيب $\omega+\omega$ ولكن $2.\omega$ عبارة عن اثنين أميجا واحد تلو الآخـــــر الذي يعطي العدد الترتيبـــي المطلوب وهو ω .

و باستخدام القاعدة الثانية المذكورة آنفاً وبالاستمرار على النحـــو نفسه نحصل على الآتي:

$$0, 1,2, \;\ldots\ldots\; \omega, \omega+1 , \omega+2 ,\ldots\ldots , \omega.2, \omega.2 +1 ,\ldots.$$

وواضح جداً بأن $\lim(\omega.2 + n)$ وهو $\omega.2 + \omega$ ويطلـــق عليـــه $\omega.3$ وبالاستمرار نصل إلى $\omega.n$ حيث n هو عدد محدد. باستخدام القـــاعدة الثانية نصوغ $\lim(\omega.n)$ وهى عبارة عن طبـــق الأصـــل ω أي $\omega.\omega$ وتعرف ايضا ω وهكذا نصل إلى $\omega^2\ldots,\omega^3,\omega^4,\omega^\omega$ و ω^ω ليـــس إلا البداية ويطلق عليه عادة ε ويلفظ إبسلون صفر ε وهو أحـــد حـــروف الأبجدية اليونانية .

و يمكن إيجاز النظرية بالصورة الآتية :

$$0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots n,\omega,\omega+1,\ldots\ldots\ldots\ldots\omega+n,\ldots\ldots\omega.2,\omega.2+1,\ldots\ldots\ldots\ldots\omega.3,\omega.3+1\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega m+m,\ldots\ldots\omega^2+\omega m+m,\ldots\ldots\omega^2 n\ldots\ldots\omega^3,\ldots\ldots\ldots\omega^n,\ldots\ldots\ldots\omega^n m_n+\omega^{n-1}m_{n-1}+\ldots..$$

$$\omega^\omega,\ldots.\omega^\omega+n,\ldots\ldots\omega^{\omega+1},\ldots\ldots\ldots(\omega^\omega)^n,\ldots\ldots\ldots(\omega)^\omega,\ldots\ldots((\omega^\omega)^\omega)^\omega,\ldots\ldots\ldots$$

وبعد هذه الأعداد الترتيبية نصل إلى

$\varepsilon_0, \varepsilon_{0+1}, ...\varepsilon_0 + \omega, ...\varepsilon_0 + \omega.2......\varepsilon_0 + \omega^2, ...$

$\varepsilon_0, \omega^\omega, ...\varepsilon_0.2......\varepsilon_0\omega, ...\varepsilon_0\omega^\omega, ...\varepsilon_0^2, ...$

والآن لنأخذ الأعداد الكاردنالية Cardina (الأصلانية) التي تتجاوز الأعداد المذكورة سابقا، نذكر أولها العدد$\aleph_1$ الذي يمثل رتبة من الأعداد اللانهائية يكون اكبر من ω وأكبر أيضا من ω+ω بينمـــــا $\aleph_0$ هــو ω ويعرف العدد الأصلاني عادة بالآتي: يقال لأي عددين رتبيين A و B لهما نفس "الأصلانية" إذا كان هناك تناظر واحد-إلى-واحد من A إلى B.

و $\aleph_1$ هو أول عدد ترتيبيـــــي (رتبـــي) ذو أصلانية أكبر مـــن ω ولا يمكن لعناصره أن تناظر واحد إلى واحد عناصر ω. وبصورة عامة يقـــال للعدد الرتبـــي A عدد أصلاني إذا لا توجد له نفس الأصلانية .

أما بالنسبة لفكرة العدد الأصلاني (القياســـي) " لا يمكـــن تعريفـــها بالنسبة للمجموعات غير المنتهية ولكن يمكن إدراكها عن طريق الحـــدس والإحساس، أنها علاقة تكافؤ والتي بـــدورها تقســـــم المجموعـــات إلى صفوف تكافؤ كل صف له مقياس معين لا نستطيع تعريفه ولكن نـــدرك أن مقياس المجموعة N يختلف عن مقياس المجموعة R ولذلك يمكن وصف فكرة العدد القياسي بالفرضية التالية: أولا، لكل مجموعة A يوجد عدد α يسمى العدد القياسي للمجموعة A ويرمز له |A|= α ويسمى كذلـــك مقياس المجموعة A" .

ثانيا: $A = \phi \Leftrightarrow |A| = 0$ و إذا كانت A= N بحيث أن N nε فـــإن A= |N n | = n أي أن مقياس المجموعةN n هو عدد عناصرها n.

ثالثا: إذا كانت A و B أي مجموعتين فإن $A \sim B$ $|B| = |A|$ وبصورة عامة فإن جميع الأعداد الطبيعية هي أصلانية في حد ذاتها، فهذه الأعداد تسمى أعداد أصلانية منتهية، لأنه توجد أعداد أخرى غير منتهية وتسمى بالأعداد الموغلة أو ما وراء المنتهية [3]. وبنفس الطريقة السابقة نحصل على رتب من ألف ، أولها $\aleph_0$ و ثانيها $\aleph_1$ وهكذا نحصل على أنواع كثيرة مرتبة ترتيبا تصاعديا :

$$\aleph_0\ \aleph_1\ \aleph_3 \qquad \aleph_{\omega},\ \aleph_{\omega H},\ \aleph_{\omega}{}^{\omega} \qquad \aleph_{\Xi 1},\ ..\ \aleph_{\Xi\omega}$$

و يمكن أن نتصور عددا آخر هو θ حيث $\theta = \aleph_\theta$

والسؤال المطروح هنا، هل توجد نهاية لهذه الأعداد؟ الإجابة بالنفي طبعا لأننا في عالم اللانهائيات حيث توجد هناك في نهاية المطاف اللانهائية المطلقة والتي يعبر عنها بالرمز اليوناني Ω وهذه بالتأكيد يصعب تصورها ووصفها أيضا .

وهذه اللانهائية هي مطلقة بطبيعتها ولا يمكن إدراكها أو معرفتها حسيا أو منطقيا، وبوجه عام هي اللانهائية التي يتحدث عنها غالبية الناس أي عبارة عن شيء ليست له حدود ولا يمكن سبر غوره .

وسؤال آخر، يخطر على بالنا، هل المجموعات اللانهائية متساوية؟ وهل كل المجموعات اللانهائية ذات حجم واحد ؟

الإجابة بالتأكيد ستكون غريبة جدا، لأنها ستحلق بنا إلى منطق آخر قد لا يتقبله عامة الناس لصعوبة تصوره . فهناك في الواقع رتب بل درجات متسلسلة من اللانهائيات، الأولى أصغر حجما من الثانية والثانية اصغر من الثالثة وهكذا $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3$

---

3 د.محمود كتكت: نظرية المجموعات

وهذا التصور يقودنا إلى أن اللاهائيات جميعها غير متساوية خلافا لما كان يعتقد به قبل كانتور، فهذا المفهوم بحد ذاته ضربة قاصمة لكل الأفكار الأرسطية وما تبعها .

أما حساب الأعداد اللاهائية فهو كالتالي بالنسبة إلى الجمع والضرب:

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

$\aleph_0 + n = \aleph_0 = n + \aleph_0$

$\aleph_0^{n+1} = \aleph^2_0 \quad , \aleph^X_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

فمجموعة الأعداد الموجبة و مجموعة الأعداد السالبة و مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الأولية جميعها متساوية أي ذات حجم واحد هو $\aleph_0$.

ولقد برهن كانتور أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي بالتأكيد غير مساوية $\aleph_0$ بل أكبر حجما منها. فهل الأمر كذلك مع الأعداد اللاهائية الأخرى ؟ بالرغم من جميع المحاولات التي بذلها كانتور من أجل إيجاد جوابٍ مؤكدٍ لهذه المسألة إلا أن الأمر قاده أخيراً أن يطلق على تلك "مسألة الاتصال" أو "فرضية الاتصال"Continum Hypothesis.
وتنص الفرضية على أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي ذات عدد أصلاني $\aleph_0$ وقوتها (قوة المجموعة) تساوي $\aleph_0$ ويرمز لها (C) وهو العدد الأصلاني لمجموعة الأعداد الحقيقية، وتقترح هذه الفرضية أيضا على أنه لا يوجد عدد أصلاني لاهائي بين $\aleph_0$ و C .

و هناك تعميم حول فرضية الاتصال وهو أن العدد الأصـــــلاني $\aleph_0$ يعتبر أصغر الأعداد الأصلانية وأن $\aleph_1$ هو عدد تال أي أكـــبر مـــن $\aleph_0$ وهكذا كل من $\aleph_0$ و $\aleph_1$ يرتبطان بالصيغة الرياضية $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

و فكرة العدد 2 جاءت كالتالي:

لنفرض مجموعة تتكون من عنصرين اثنين { a, b } فإنه يمكن ايجـــاد أربع مجموعات جزئية من ضمنها المجمـــوعة الخالية φ وتكون جميعها φ, {a} , {b} , {a,b }

وإذا كانت المجموعة تتكون من ثـــلاثة عناصر {a,b,c } فإنه يمكـــن إيجاد مجموعات جزئية من المجموعة نفسها ويكون عددها عندئـــذ ثمـــاني مجموعات وهي φ {a,b,c} , {b,c} , {a,c} , {a,b} , {c} , {b} , {a} حيث يمثل العدد اثنين أساسا لهما وبالمثل لأية مجموعة أخرى. ومن هـــذا الأساس برهن كانتور على وجود رتب من اللانهائيات .

لقد كان مفهوم "قوة المجموعة" إحدى المسائل التي شغلت بال كانتور كثيرا وقادته إلى صياغة فرضيتين حول طبيعة المادة والأثير ومـــن هـــذا المنطلق استعار المصطلح الليبنـــزي Leibnizian وطرح السؤالين التاليين: ما هي قوة المجموعة Machtigkeit لجميع المونـــودات Monads (ذرات المادة عند ليبنـــز) المادية ؟ و ما هي قوة المجموعة لجميع المونودات الـــتي تكون أثيرا ؟

أجاب كانتور بالنسبة إلى مجموعة المونودات المادية وهى القوة الأولى أما المونودات الأثيرية فهي القوة الثانية وزعم أيضا بأن هناك عدة أسباب تدعم هذه النظـــرية ولكنه لم يفصح عن واحدا منها آنذاك بل اكتفـــى على أن نظريات اي لمجموعات للأعداد الموغلـــة أو مـــا بعـــد المنتـــهي

Transfinite يمكن تطبيقها وستكون ذات أهمية في الحقلين الرياضي والفيزيائي ومن ثم ستعالج قضايا كثيرة حول الظواهر الفيزيائية.

لقد وجد كانتور موضوعية مشابهة للأعداد الموغلة في العالم المادي، فهذا التحقيق تم إنجازه على أساس اللانهائية الحقيقية لمجموعات المونودات الأثيرية أو العينية(المادية) التي تكون هذه الأعداد انعكاساً لها و إن تطبيقاتها أي الأعداد الموغلة في العالم الطبيعي هو إثبات مباشر لوجودها الحقيقي.

وهناك منحى آخر استخدم فيه منطق كرونكر وهو كون ما تتمتع الأعداد الصحيحة من واقع ملموس فالأمر كذلك بالنسبة لتلك الأعداد . وهناك سبب آخر دفع كانتور ليحصن أعداده الموغلة من منطلق المجموعات اللانهائية المطلقة، بمعنى آخر متى تم وجود المطلق لمجموعات اللانهائية، فإن هذه الأعداد ليست إلا نتيجة مباشرة لها ومتى قبلنا بوجود المجموعات اللانهائية فإن مسألة الأعداد الموغلة ستكون هي الأخرى نتيجة لها وهكذا أعاد كانتور تفحصها أكثر من مرة حتى توصل أخيراً إلى أن هذه الأعداد ليست إلا أعداداً لانسبية جديدة أي أن مصيرها كالأعداد الصماء (غير النسبية أو غير المنطقة).

و كما يقول "إن الأعداد الموغلة في غاية الأمر أعداد لا نسبية جديدة وأن الأعداد الصماء النهائية مشابهة لها تماما-الأعداد الموغلة-، وربما اقترح من حيث المبدأ بأنها شبيهة بالطريقة التي وصفتها آنفا في تعريف الأعداد الموغلة وأن المرء هنا يؤكد إنها ترتبط ارتباطا حميما بالأعداد الصماء النهائية فهي متشابهة تماما في معظم خصائصها الجوهرية" وهكذا أعاد كانتور الاعتبار الموضوعي لهذه الأعداد .

فقد أعلن ديفيد هلبرت في المؤتمر العالمي للرياضيات عام 1900 الـــذي عقد فى باريس أن هذه المعضلة —الأعداد الموغلة - لابد وأن تكون ضمن أوليات المسائل التي يجب مناقشتها في هذا المؤتمر بل يجب أن تكون مقدمة على غيرها لأنه أي هلبرت كان يرى فيها تحديا كبيرا لأهميتها القصوى.

ثمة نتائج إيجابية توصل إليها الرياضي والمنطقي كورت جودل Kurt Godel في عام 1938 مستخدما أسلوبا جديدا في المنطـــــق الريـــاضي معتمدا على مسلمات زبرميلو- فرنكل Zermelo-Frankel وهو أنه من المحال كليا إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية لا تساوي ℵ، وهذا لم يعط حلا كاملا لأن المسلمات وحدها لا تكفى بالرغم من وجود نتائج تبرهن صحة وصدق فرضية الاتصال (سيتم مناقشة هذا الجـــــانب في الفصـــل اللاحق).

الفصل الرابع

اللانهائية بعد كانتور أو اللاكانتورية

اللانـهائية بعد كانتور او اللاكانتورية

" لقد جعلتني لانـهائيا، تلك هى لذتك"

طاغور

يحاول البـــاحث فى هـــذا الفصـــل أن يغطـــى أولاً مســـألة "المفارقات"Paradoxes أو "المحـــيرات" (التنـــاقض الظـــاهري) أي المتناقضات الموجودة في نظرية ا لمجموعات ثم يلقـــي الضـــوء علـــى التحليل الرياضي اللامعياري Non-standard analysis وهو الفرع الذي شق طريقه الرياضي الامريكي إبراهـــــام ربنســـون E.Roninson في ستينيات هذا القرن وتسمى نظريته هذه باللاكانتوريـــــة باعتبارهـــا تجديداً وسداً لثغرات الكانتورية التي أهملت بـــل تجـــاهلت مفـــهوم اللانهائية في الصغر .

في الوقت الذي أرادت أن تكون الهندسة "اللااقليديـــة" (هندســـة بولاي - لبوتشفسكي) رداً وتصحيحاً لبعـــض مفـــاهيم الهندســـة الإقليدية*، هذه الهندسة التي ســـيطرت علـــى الفكـــر الريـــاضي والفلسفي أكثر من ألفي عام ولاتزال تتمتع بتطبيقات شتى.

وكما جاءت ا للاقليدية ثورة على المفاهيم الاقليديـــة، هكـــذا أرادت أن تكون اللاكانتورية الـــتي تبنـــت التحليـــل اللامعيـــاري (اللاقياسي) عوضاً عن التحليل المعياري الكلاسيكي الشـــائع .أمـــا

---

* الاقليدية: هي نسبة إلى الرياضي اليوناني الشهير أقليدس 300ق.م تقريباً صاحب كتاب "الأصول" الذي يعتبر بحق أحد المصادر الأساسية للعلم الرياضي.

جذور هذا التحليل فيمتد إلى أفكار الرياضي الألماني الشهير ليبنتز الذي توصل إلى علم حساب التفاضل والتكامل بصورة مستقلة عن إسحاق نيوتن .

لقد وصف هلبرت وهو من كبار الرياضيين اللذين عشقوا النظرية الكانتورية بأنها فردوس رياضي يجب الاستمتاع به بل والعيش فيه، وليس باستطاعة أحد أن يسوقنا عنه، وكون أي فردوس لابد وأن تعيش فيه الثعابين والشياطين لذا يجب التخلص من هذه الآفات كي يظل الفردوس نعيماً، فالمفارقات التي سوف نتحدث عنها هي بمثابة تلك الثعابين التي يجب التخلص منها، أي بمعنى آخر إيجاد حلول لتلك المتناقضات .

إن أحد تلك الاختلافات التي واجهت رياضيي الفردوس هي متناقضة بورالى–فورتي Burali-Forti (1897) والثانية متناقضة فريجه–رسل Frege-Russell (1902) وأخيرا بالكذبة الإغريقية القديمة التي يطلق عليها الكذوب Liar للبوجنسكي Bochenski (1962) .

لقد كان الفلاسفة قلقون جدا حول طبيعة المتناقضات أو المفارقات وبالتحديد حول مسألة إلغاء (إبطال) اللانهائية وذلك منذ الفترة ما قبل السقراطية التي بدأت عند خوضهم لمتناقضات اللانهائية المتعددة . وكانت الحلول التي قدمها أرسطو، هو الرفض المطلق للانهائية الحقيقية، وكذلك بالنسبة لرجال اللاهوت الذين اعتبروها تحديا مباشرا لطبيعة الله اللامتناهية والمطلقة.

كان أعتقاد كانتور حول الذين رفضوا فكرة اللانهائية في الرياضيات والفلسفة واللاهوت ناجماً عن خطأ شائع عند أرسطو وكذلك المدرسيين الذين التصقوا بمبادئه ومنهجه بمثابة نبراسا يستدلون به حقائقهم. وخلاصة الجدل كان يدور حول "إلغاء العدد" Annihilation، فعلى سبيل المثال: العددان A & B كلاهما أكبر من الصفر و مجموعهما A+B < B , A+B >A ، فإذا كان B لانهائياً بغض النظر عن ماهيته، فإن $A+\infty=\infty$ وهذا في حد ذاته نقيض لقاعدة الجمع الأساسية، لذا كان التصور حول اللانهائية إلغاءً بل إبطالاً لعدد لانهائي محدد، من هذا المنطلق رفضت الأعداد اللانهائية باعتبارها أعدادا غير متناسقة لقدرتها على إزالة الأعداد النهائية .

كان احتجاج كانتور حول هذه المسألة، بأن الأعداد اللانهائية لا يجب بالضرورة أن تتمتع بنفس خصائص الأعداد الحسابية النهائية، حيث برهن أن الأعداد اللانهائية يجب تطويعها أو تهذيبها بالأعداد النهائية . والفارق الذي أدخله كانتور بين تلك الأعداد هو عدم حدوث عملية الالغاء، أي بين ω و $\omega+1$ يمكن إضافة الأعداد النهائية إلى تلك اللانهائية دون حدوث إلغاء للعدد النهائي، لذا كان أرسطو مخطئاً في نظر كانتور من هذه الناحية .

و هكذا أخذ كانتور على عاتقه أعمال كبار مفكري القرن التاسع عشر، وأقترح على المرء الذي يريد سبر عالم اللانهائيات عليه الرجوع

والاستفادة من أعمال كبار الفلاسفة أمثال لوك Lock وديكارت وسبينوزا وليبنتز .

وكانت صرخة كانتور الفلسفية، هل اللانهائية سؤال مستحيل ؟ و كيف تكون اللانهائية محالة؟ بالنسبة إلى المفكرين مثل سبينوزا وليبنتز، فاللانهائية بمعناها المطلق لا يمكن إدراكها كالخالق نفسه، وأية محاولة لإرساء الأسس لتحديدها دون الآخذ بالاعتبار التصور الجهدي (الممكن) فأمر مصيره الفشل .

لقد كان كانتور معجباً بمحاولات بولزانو حول إثبات وشرح مفارقات اللانهائية المتعددة، واستحداثه فكرة اللانهائية الحقيقية لا تحدث أي تناقض في الرياضيات. وكان كتاب بولزانو" مفارقات اللانهائية" Paradoxien des Unendlichen الصادر في عام 1821 موضع ثناء وتبجيل لكانتور لكلا الحقلين الفلسفي والرياضي، حيث تعتبر السمات الرئيسة في أعمال بولزانو هي الحد الفاصل بين اللانهائيتين الجهدية والحقيقية .

لقد شرح كانتور تفسيراته حول المتناقضات في رسائله المتبادلة مع ديدكن في صيف 1899، وكانت الأولى التي كتبها في الثالث من أغسطس ما هي إلا تكراراً لكل ما ورد في كتابه "الأسس" وهو أن الخطوات المؤلفة من ℵ وأعداد الفئات التي تناظرها تبقى بالطبع دون حدود، أي لانهائية. ولكن كانتور لم يأخذ بعين الاعتبار

وعندما أعاد اعتبار تلك المنظومة تأكد تماماً على أن المجموعة يجب أن تكون مرتبة تماماً وأن Ω يجب أن يناظرها نمط مرتب أيضـــا، فـــإذا كانت Ω من نمط δ، فلابد أن تكون أكبر نمطاً من Ω وحيث إنهـــا تحتوي على جميع الأنماط المرتبة، فقد تواجهنا صعوبة عندما نقــول أن $\delta < \delta$.

هناك شيء متأصل وغير مجاز في اعتبار Ω مجموعـــة متماســكة (متساوقة). لقد وضح كانتور موقفه تجاه ذلك في النظرية الآتية :" إن منظومة Ω لجميع الأعداد المرتبة هي لانهائية تماما ومجموعـــــة غـــير متماسكة" وبالمثل بالنسبة لمنظومة ת[1] وهي مجموعة الأعداد الموغلـــة القياسية (الأصلانية): " تتكون منظومة من حتوي علـــى منظومـــة شبيهة Ω أي لانهائية وغير متماسكة.

والسؤال المطروح هنا هل هناك عدد قياسي خارج المنظومـــةΩ، بتعبير آخر هل هناك مجموعة قوتها ليست ألفاً ℵ ؟ لقد أجاب كانتور بالنفي طبعا.

لقد كان البرهان الذي تقدم به كونك J.C.Konig فى المؤتمر العـــالمي الثالث للرياضيات الذي عقد في هايدلبرج عـــام 1904 أحـــد تلـــك المفاجآت الكبيرة التي واجهها كانتور في حياته. كان موضوع برهانه الذي استهل فيه :

[1] ת ويلفظ تاف وهو أحد حروف الأبجدية العبرية.

" أن قوة الاستمرارية لا يمكن أن تكون ألفاً ℵ مستخدما في ذلك نتيجة بيرنشتاين Bernstein وبرهن زيرميلو فيما بعد خطأ كونك وبالذات عندما اعتمد على نتيجة بيرنشتاين الخاطئة وهذا ما تنبأ به كانتور وبه يعتبر اكتشاف زيرميلو بحق تخفيفا من حدة القبض الذي انتاب كانتور، وبات الأمر أخيراً على الخروج من هذا المأزق اعتبارا أن أية مجموعة يجب أن تكون مرتبة تماماً .

1. مفارقات / متناقضات النظرية الكانتورية :

تقول نظرية كانتور: " إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيباً تصاعدياً بحيث أنه من بين كل عددين منهما أياً كانا يوجد دائما عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد.

يقول فورتي: إذا أخذنا هذا العدد الأخير طرفاً وحيداً في المقارنة فلا بد أن يكون وفقاً للنظرية نفسها- باعتباره عددا مرتبا لامتناهيا- أقل من عدد آخر لا نعلمه، إذن فأكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية، وهذا تناقض في هذه النظرية".

تقول نظرية كانتور:" فى العدد الأساسي المتناهي كل عدد منته باعتباره مجموعة set أو فئة class لا يشتمل على ذاته كجزء منها.

و يقول رسل: إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المتناهيـــة كلـــها (أي مجموعة كل المجاميع العددية) هو في آن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضا كجزء من ذاته، وهذا تناقض .

فهو لايشتمل على ذاته لأنه أكبرها وفقا للنظرية ولكنه أيضاً يشـتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع أي إحدى المجاميع التي لا تشتمل على ذاتها [2] ".

ويوضح رسل مفارقته بالمثال الآتـــي: هناك حلاق في القريـــة يقوم بحلق ذقون جميع الأفراد الذين لا يحلقون ذقونهم، والحلاق نفسه هو أحد أفراد القرية فهل يستطيع أن يحلق ذقنه أم لا؟ فإذا تم ذلـــك فقد أخل بالشرط الذي ينص على أنه يحلق الذين لا يحلقـــون وإذا لم يحلق ذقنه يخل أيضا لأنه لابد أن يحلق ذقون جميع الذين لا يحلقـــون وهنا تبرز المشكلة !!! .

باختصار توصل رسل إلى مفارقته بالصياغة المنطقية وهي هـــل هناك إمكان وجود مجموعة تنتمي إلى نفسها وفى الوقـــت نفســـه لا تنتمي إليها ؟

هناك نوعان من اللانهائية، الأول هو لانهائية الأعداد الطبيعية (أو أية مجموعات أخرى تكافؤها) ويطلق على هذا النوع $\aleph$ المجموعـــات والتي يكون عددها الأصلاني (القياسي) هو $\aleph_0$ وتكون المجموعـــة في

[2] د.محمد الفندي: فلسفة الرياضة، ص116.

هذه الحالة قابلة للعد (فالمجموعة القابلة للعــــد هـــي تلـــك الـــتي تناظر/تطابق واحد إلى واحد مجموعة الأعداد الطبيعية)، أما النـــــوع الآخر فهو الذي يمكن تمثيلــه بجزء من الخط المستقيم أو أي خـــــط آخر والعدد الأصلاني في هذه الحالة هو C وعادة يرمز هذا للاتصـــال أو الاستمرارية، فأي خط مستقيم يكون عدده الأصلاني هوC والأمر ينطبق أيضا على أي شكل آخر كالمستطيل في المستوى أو المكعب في الفراغ وحتى الفراغات (الفضاءات) اللامحـــدودة ذات الإحداثيـــات النونية .

لقد أسس أرنست زيرميلـــو E.Zermelo في عـــام 1908 نظريـــة المجموعة البدهية (الاكسيوماتية) متخذا في ذلك مجموعة من البدهيات شبيهة بخصائص النقط والخطوط المستقيمة التي تحدث عنها أقليـــدس. أعتبر زيرميلو "المجموعة" شيئا غير محدد وغير معرف ولكنه يخضـــــع لبدهيات معطاة .

"تزعم زيرميلو حركة لتقويم ما أعوج من نظرية المجاميع، وذلـــك بتأسيسها على مسلمات،.. وقد حاول هذا التيار تحاشي النقــــائض وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بـــين قضاياها فاستخراج زيرميلو مثلاً المسلمات المتضمنة لها عند كـــانتور

وأضاف إليها مسلمتين, مسلمة الأنتقاء Selection ومسلمة الرد Reducibility"[2].

تنص مثلا مسلمة الرد: أية دالة من رتبة ونمط ما، تناظرها دالة أخرى من الرتبة الأولى ونفس النمط حيث تكافؤها شكليا. (يقال للدالتين بأنهما متكافئتين شكليا عندما تكون كلتهما صحيحتين أو كلتهما غير صحيحتين).

لنتحدث مثلا عن "بدهية الاختيار" Axiom of Choice و تنص على: إذا كانت α هي مجموعة مكونة من مجموعات غير خالية A,B,C,....... فإنه توجد مجموعة فلتكن Z تحتوي على عنصر واحد على الاقل من تلك المجموعات.

ورغم الدور الأساسي الذي تلعبه هذه البدهية في نظرية المجموعات فإن بعض الرياضيين اتخذوا موقفا سلبيا تجاهها بل أصر البعض على نبذها بقدر المستطاع ويعزو السبب في ذلك إلى عدم التمكن من إثبات صحتها أو خطئها .

ففي عام 1938 عالج كورت جودل K.Godel المعروف "بنظرية اللاكتمال" حيث قام بتمحيص هذه البدهية تمحيصا دقيقا وتبين له بأن الخلل المزعوم ليس في بدهية الاختيار نفسها بل في جميع البدهيات الأخرى، فهي بالتالي لا تختلف جذريا عن البدهيات

---

[2] المرجع نفسه ، ص 122

المتعارف عليها في نظرية المجموعات منوها إلى أن بدهية الاختيار ليست بدرجة من الخطورة إذا ما قورنت بالبدهيات الأخرى ما دام التناقض موجودا في نظرية المجموعات القياسية (المعيارية) فالأمر كذلك بالنسبة لنظرية المجموعات المقيدة فالتناقض كامن فيها.

تنص فرضية الاتصال الكانتورية على أنه ليس ثمة وجود لعدد أصلانى لانهائي أكبر من ℵ أو أصغر من C وبالرموز، فإذا كان α عددا أصلانيا فإن $\alpha \nsucc \aleph_1$ أو $\alpha \nprec \aleph_0$

لقد برهن جودل أيضا أنه يمكن اتخاذ فرضية الاتصال كبدهية إضافية لنظرية المجموعات، فالإضافة إلى فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة يؤديان إلى تناقض، بمعنى آخر أن التناقض كامن في نظرية المجموعات المقيدة والوصول إلى مثل هذا الاعتراف يعني إيجاد نصف حل لمعضلة كانتور، أي ليس برهانا على الفرضية، ولكنه برهان على عدم دحضها ومن وجهة نظر رياضيي القرن العشرين كل من فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة قابلا للتطبيق على العالم الفيزيائي وكلتيهما متناسقان .

فالحقيقية التي توصل إليها جودل هي أن فرضية الاتصال لا يمكن دحضها وبالمثل لا يمكن إثباتها، رغم أن طموح جودل هو صياغة نموذج لنظرية المجموعات المقيدة التي يمكن من خلاله البرهنة أن

بدهية الاختبار وفرضية الاتصال ليستا إلا وجهين لعملة واحدة، نظريتان فحسب.

ففي عام 1963 تقدم شاب يبلغ من العمر التاسعة والعشرين من جامعة ستانفورد الأمريكية باقتراح حول مسألة الاتصال و لم تكن طبيعة الاقتراح أو الحل ثورياً فحسب بل الأسلوب الذي عولجت فيه المسألة كان جديدا تماما منحت له جائزة فيلد Field العالمية عام 1966. فهذه الجائزة هي أعلى تتويج علمي يكرم به الرياضيون وتعادل هذه تماما جائزة نوبل في الحقول الأخرى. كان هذا الشاب الرياضى الأمريكي بول كوهن Paul Cohen .

لقد كان الرياضيون قبل كوهن يواجهون مشكلة شاقة، وهى هل الجمل الرياضية صادقة أو غير صادقة؟ للتخلص من هذا المأزق، هناك احتمالان إما إثبات صحتها أو إثبات خطئها؟

ولكن الاقتراح الذي تقدم به كوهن الشاب حول هذه المسألة هو أن هناك جمل رياضية لا يمكن أن تكون خاطئة وكذلك لا يمكن أن تكون صادقة أي نحن في موقف لا يمكن البت في أمرها **تبقى "غير قابلة لأتخاذ القرار حولها"**Undecideable . والصعوبة كما تبدو في طبيعة المادة الرياضية وعدم التصاقها المباشر بالواقع المحسوس، فهناك بعض المفاهيم المجردة مثل "النقطة" و "الخط المستقيم" و"المستوي" . . الخ ليس لها نظير في الواقع وفكرة "العدد"

أيضـــا إحدى تلك المفاهيم. فمثلا التجريد الآحادي يقودنا إلى العدد "واحد" والتجريد الثنائي يقودنا إلى العدد اثنين وكذلـــك بالنســبة للأعداد الأخرى، ففي العالم المحسوس ليس هناك عدد اثنان أو ثلاثــة ولكن جذور هذه الأعداد موجود في العالم الواقعي. و كما يقـــول الرياضي والمنطقي الألماني فريجه G.Frege " إن قوانين العدد ليست هي قوانين الطبيعة أنها قوانين الطبيعة".

التحليل اللامعياري (اللاقياسي):

والآن لنلقى الضوء على التحليل اللامعياري الذي تبلور على يد الرياضي والمنطقي الأمريكي أبراهام روبنسون والذي في حد ذاته يمثل أسلوباً جديداً في دراسة التحليل الرياضي وأداة أخرى يعالج بها، وتمتد جذور هذا التحليل إلى الرياضي والفيلسوف الألماني ليبنتز Leibniz. لقد حاول ليبنتز تحليل "الموقع" أو التموقع اللحظي لسلوك الـــدوال، تلك الظاهرة التي تأخذ حيزاً عند نقطة واحدة في الفضاء أو الزمـــن (لقد كانت مسألتا الفضاء والزمن منفصلتين آنذاك، حـــتى جـــاءت النسبية ودمجتهما في قالب واحد و هو الزمكان)، و ابتكر لنا ليبنـــتز نوعاً جديداً من الأعداد المسماة " باللانهائية في الصغـــر" Infinitely small وهي الأعداد التي تكون أصغر من القيمة المطلقـــة لأي عـــدد موجب صحيح يختلف عن الصفر. وأطلق عليها الأعداد اللاصفرية أو المتناهية في الصغر. ولقد برزت هذه الأعداد عند تشـــيد ليبيتـــز

لحساب التفاضل والتكامل واستحدث مفاهيم جديدة من أجل اكتمال رائعته ومنها مفهوم المشتقة .

تعرف مشتقة الدالة في الحساب التفاضلي بالآتي:

f(x)=f(x+dx)f(x)/dx حيث dx هو مقدار لاصفري بل متناه في الصغر. والمتناهيات في الصغر عبارة عن كميات يمكن إهمالها إذا ما قورنت بالأعداد الموجبة الصحيحة ولا شك أن هذه المتناهيات تبدو غير عادية ولكنها تسلك سلوك الأعداد الصحيحة العادية، ورغم أن وضعها ليس ملائماً فقد أطلق عليها ليبنتز "خيال خصب". لقد نبذها نيوتن و فضل تعريف مشتقة الدالة مستخدما السرعة اللحظية.

أما الرياضي السويسري لاهوبتل L'Hopital الذي كتب مقرراً دراسياً في حساب التفاضل و التكامل كان هو الآخر متحمسا و معترفا بوجود هذه المتناهيات في الصغر، إلا أن العديد من الرياضيين المرموقين استخدموها في دراساتهم وحاولوا جل اهتمامهم تشيد البناء المنطقي للنهايات في الصغر، ونذكر منهم على سبيل المثال لأكرانج وودالمبرت وبولزانو وعلى رأسهم كوشي.

لقد كان تصور كوشي حول المتناهيات في الصغر باعتبارها كميات متغيرة تقترب إلى الصفر، هذا التصور قاده إلى مفهوم "النهاية" Limit. وبصورة أوضح عندما يكون الفرق بين الكميتين bوa متناهياً في الصغر. وبالرموزa-b. فإذا كانت ε متناهية في الصغر

وموجبة فإن مقلوبها $1/\varepsilon$ يكون أكبر من أي عدد صحيح ويكون $1/\varepsilon$ بين أي عددين صحيحين لانهائيين لا معياريين هما N و N+1 حيث $1/\varepsilon=N$.

أما وجهة نظر كانتور حول مسألة اللامتناهيات في الصغر فتبرز من إصراره الدائم أن الأعداد الموغلة (ما وراء المنتهي) تبرز تلقائيا وضروريا من العناصر التي تؤلف مجموعات، وكان مقتنعا تماما بالخصائص التي قدمها حول طبيعة اللانهائية رغم ما تحمله هذه الخصائص من بنيتها الممكنة، أي صورها الجهدية. لذا انعكس هذا التصور على موقفه في تمثيل مجموعة تلك الأعداد بأنها حتمية وكاملة و غير قابلة إلى أي رأي آخر أو تفسيرات معارضة.

من هذا المنطلق لم ترحب أعمال الرياضي الإيطالي فيرنوسيه G.Vernose لأنها عالجت أعمال كانتور من منطلق آخر أي الزاوية التي كان يعتبرها كانتور هجوما على نظريته، تلك هي فكرة اللانهائية في الصغر و التي يشبهها كانتور بأنها " كوليرا أبتلت بها الرياضيات" هذه الكوليرا التي بدأت في ألمانيا من خلال أعمال توميه ودي بوس ريموند وشتولس، حيث رفض كانتور دور اللانهائية في الصغر وبالتحديد في طبيعة الاستمرارية وذلك في عام 1886 عندما كان في محاولة جادة لصوغ برهانا كاملا لدحض اللانهائية في الصغر، وعلى حد قوله أي، إن قبول اللانهائية في الصغر يعني بالضرورة عدم

اكتمال نظريته حول الأعداد، بمعنى آخر قبـــول أعمـــال أولئـــك الرياضيين يعنى الرفض المطلق لأعماله لذا أصر حتى نهاية حياته بعـــدم الاعتراف بأعمال فيرنوسيه .

اعتبر كانتور الأعداد الأصلانية (القياسية) والأنماط الرتبية جميعها امتداداً لمفهوم العدد نفسه وزعم أيضا أن فشل فيرسيه في فهم الأعداد الموغلة سببه هو صياغة نوع آخر من اللانهائيات واشاد علـــى إنهـــا استنتاجات خاطئة لكونها لا تتوافق مع نظـــريته. وصرح أيضا بـــأن أية نظرية عن اللانهائيات يجب أن تتوافق وأن لا تخرج عن مجال نظرية الأعداد الموغلة وخلافا لذلك تعتبر باطلة .

ونضيف إلى الخلفية التاريخية هذه دعما رياضيا وأصدق ما نستـهل به هو خاصية أرشميدس التي تنص على الآتي:

أي عدد صغير جدا (أصغر مما يتصور) لا يساوي الصفر طبعا، فإن الإضافات المتكررة له عدة مرات يصبح كبيرا جـــدا فاللانهائيـــة في الصغر عند أرشميدس هو عدد أكبر من الصفر ولكنه يظل أصغر مـــن الوحدة/الواحد ($a=0$ و $\Sigma a<1$)

لقد أنطلق روبنسون من النقيضة الـــتي تركـــها ليبنـــتز وهـــي اللانهـــائية في الصغر والتي هي عبارة عن أعداد غير متناهية في الصغر أما موجبة أو سالبة ولكنها تحمل خصائص الأعداد العادية. والسـؤال المطروح هنا، إذا كانت اللانهائية في الصغر لهـــا نفـــس خصـــائص

الأعداد العادية، فكيف تكون موجبة وأصغر من أي عدد موجب عادي؟ فهذا هو التناقض بعينه.

لقد أستخدم روبنسون اللغة الشكلية فى حل هذه المتناقضات وبرهن على كيفية إنشاء نسق يحتوي على اللانهائيات في الصغر شبيهاً بنظام الأعداد الحقيقية. ولتوضيح ذلك، لنفرض M هو فضاء كلي-معياري وL اللغة الشكلية، فأية جملة في L عبارة عن فرضية في M قد تكون صادقة أو غير صادقة. بمعنى آخر أي جملة في L أما أن تكون صادقة أو نفيها صادق، فلتكن هذه الجملة Kحيث تمثل جميع الجمل الصادقة ونطلق على M نموذج يخص K. أما M فهو البناء الرياضي الذي يحوي الجمل الصادقة التي تنتمي إلى K، عندئذ يمكن أن نطلق على K كشيء معرف تماما، وهناك أيضا نماذج خاصة بـK غير معيارية أي هناك بناءات رياضية أخرى تختلف تماما عنM* يرمز لها M وهي تعد أيضا نماذج عن K .

هناك أعداد يطلق عليها الأعداد الفوق حقيقية أو ما بعد الحقيقية Hyperreals Numbers وهي التي تحتوي على الأعداد الحقيقية العادية (القياسية/المعيارية) وغير المعيارية، ويكون العددx فوقحقيقي إذا كانت قيمته المطلقة أصغر من أي عدد حقيقي موجب معياري فليكن M وبالرموز M> x وعادة ما تكونx محصورة في الفترة [M.M*] على الخط المستقيم .

كل عدد نهائي فوقحقيقى x هو مجاور (قريب جدا) العدد الحقيقي المعياري a مثلاً ولا يمكن لأي عدد فوقحقيقي أن يكون مجاورا لعددين مختلفين ويكتب عادة a≈x. فإن العدد الفوقحقيقي x و y هو y≈x ويقال بأن x لانهائي في الصغر Std x)=0).

و عندما عرف فيرشتراس مفهوم" النهاية" عام 1872 لم يستخدم الكميات المتناهية في الصغر ولكن الحقبة التي سببت انقلابا في تاريخ تلك الكميات كان في عام 1960 أي ما يقارب ثلاثمائة سنة عندما وضع ليبنتز أساسيات تلك الكميات وهكذا صدرت أعمال روبنسون حول التحليل الرياضي اللامعياري والذي اشتملت فيه البنية المنطقية للكميات المتناهية في الصغر منطلقا من مفاهيم ليبنتز.

تنطلق الأسس الليبيزية على أن المتناهي في الصغر Infinitesimal هو عدد صغيرا جدا من أي عدد موجب ولكنه اكبر من الصفر أما العدد المتناهي في الصغر السالب فهو أكبر من أي عدد سالب ولكنه أصغر من الصفر، فهذا التعريف يعود إلى ليبنتز.

" كان أغلب الرياضيين ينظرون إلى اللامتناهيات في الصغر على أنها ليست سوى أوهام " و بالرغم من ذلك " وجدوا أنه يصعب تجنب اللامتناهيات في الصغر في مسار اكتشافتهم وذلك مهما كان عدم استساغتهم لها نظريا ".

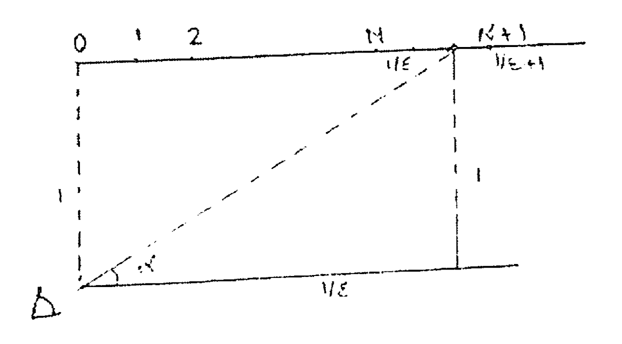
والغريب في الأمر فإن اللانهائيات هذه " تقع في الصنف غير المعياري" و " ما زالت تعتبر كينونات محيرة .. وليس من الواضح أن

مثل هذه الصغائر موجود فعلا، و لكن الصحة المفاهيمية للنظرية قد تم اثباتها إلى درجة تكافئ ثقتنا المبررة بنظم رياضياتية أخرى" [3] .

لقد شهد القرن العشرون استخدامات رصينة لفكرة "النهاية" والتي يعبر عنها رياضيا lim f(x) وهي الفكرة التي تعكس وجهة نظر النهاية باعتبارها قيمة متناهية، حيث نحصل علىf عندما تقتربx إلى a.

هل جميع هذه الأعداد تكون مرئية ؟

لنتصور الآن مجالاً مكبراً (مجهرياً) سنجد أن جميع الأعداد المرئية في هذا المجال والتي تقترب إلى الصفر هي كميات متناهية في الصغر كما هو موضح في الشكل.



فالصفر نفسه هو كمية متناهية في الصغر بالإضافة إلى أعداد أخرى متناهية في الصغر، فسلوك هذه الكميات بوجه أدق يكون

3 "حل مفارقات زينو"، مجلة العلوم .

عيانيا (يمكن رؤيتها بالعين المجردة) و يمكن تطبيق عمليات الجمـــع والضرب، فمثلا، إذا كانت ε كمية متناهية في الصغر، فـإن $\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ أما بالنسبة إلى $\varepsilon+2$ فإنها تنطبق على العدد 2 نفســه ولكــن المجـال المجهري يركز على العدد 2 وتبدو لنا تلك الكمية مغايرة عن العدد2.

فالأعداد العيانية هى تلك الأعداد العادية المعروفــة الــتي نتداولهــا، كالأعداد الطبيعية مثلا، عندئذ يطلق عليـــها الأعـــداد المعياريـــة Standard فكل عدد معياري فليكن a تكون حوله أعداد لانهائية مــن نوع جديد تختلف عنه مجهريا وتنطبق عليه عيانيـــا، فمثـــلا العــدد المعياري2 فإن العدد اللامعياري له سيكون $\varepsilon+2$ حيث ε كمية متناهية في الصغر غير صفرية.

نحن في الواقع أمام صورتين الأولى مجهرية و الأخـــرى عينانيـــة، فمثلا يمكن كتابة العدد 2 بالصورة العينانية هكـــــذا $\varepsilon+2=2$ بينمـــا الصورة المجهرية $\varepsilon+2\neq 2$ و يفضل كتابتهما على التـــالي: $2 + \varepsilon \simeq 2$ أي $\varepsilon + 2$ عندما تقترب ε من 2.

ولكن $2 = \varepsilon+2$ أي لا يساوي 2 ، إلا إذا كانت ε كمية متناهية في الصغر وتكتب $\varepsilon \cong 0$.

أما بالنسبة للقواعد الحسابية للكميات المتناهية في الصغــر، فإنــه بوسعنا أن نحصر القواعد الآتية: لنفرض ε كمية متناهية في الصغــر ، غير صفرية أي $\varepsilon \neq 0$ فإن تلك الكمية تحقق القواعد الآتية :

1. $\varepsilon+\varepsilon = \varepsilon$
2. ε x عدد نهائي فوق حقيقي = ε

3. $\infty+\infty = \infty$ (كلاهما موجبان أو سالبان)

4. $n + n = n$ (n عدد نهائي ∞)

5. $1/\varepsilon = \infty$ و $1/\infty = \varepsilon$

6. $1/n$ عدد نهائي

7. لا توجد قاعدة لخارج القسمة وكذلك $n \times \Sigma\varepsilon$ أو $\varepsilon \times \infty$

وقبل أن نختم هذا الفصل نريد القول على أن كانتور لم يكن شـغله الشاغل محصوراً على الجانب النظري الصرف بل تجـاوزه جـاهداً وساعياً وراء التطبيقات العملية في الميادين الأخرى وبالذات عندمـا انصب اهتمامه في حقل الفيزياء الرياضية وهذا التوجه بمثابة الدافـع الأساسي في أبحاثه، ففي عام 1883 في لقاء مع الرياضيين في مدينـة فرايبورج صرح الآتي :" إن إحدى المسائل الهامة في نظرية المجموعات بل والجزء الأساسي كما اعتقد هو الذي تطرقـت إليـه في بحثـي Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre الذي يحتـوي على تحد لإيجاد الروابط المتنوعة أو قوى المجموعـات الموجـودة في الطبيعة (على الأقل تلك التي نعرفها أي في متناول خبرتنا)، حيـث توصلت إلى تطوير المفهوم العام للترقيم Anzahl في المجموعات المرتبـة تماماً، و بتعبير آخر الأعداد المرتبة".

ملحق

بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بنظرية المجموعات واللانهائيات

المجموعة Set :

هي أي تجمع من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفاً جيداً. وتسمى الأشياء المكونة للمجموعة بالعناصر.

المجموعة الخالية: Empty Set

هي مجموعة خالية من أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\ \}$.

المجموعة الجزئية : Subset

إذا كان كل عنصر في المجموعة "A" هو عنصر في مجموعة أخرى B، فإنه يقال أن المجموعة A هي مجموعة جزئية منB وتكتب $A \subseteq B$.

المجموعة الشاملة : Universal Set

هي المجموعة التي تكون كل المجموعات جزئية فيها .

إذا كانت B,A مجموعتين فإن :

$A \cup B = \{x : x \in A$ أو $x \in B\}$ تسمى بخاصية الاتحاد Union

$A \cap B = \{x : x \in A$ و $x \in B\}$ تسمى بخاصية التقاطع Intersection

$A/B = \{x : x \in A$ و $x \notin B\}$ تسمى بخاصية الفرق Difference

بدهية اللانهائية :

توجد هناك مجموعة x تحتوي علي مجموعة خالية، وكذلك إذا كانت y تنتمي للمجموعة x، فإن اتحاد y و{y} ينتميان إلى x، وتؤكد البدهية أيضا على وجود مجموعات لانهائية .

$$[\exists x:\phi, y\in x \,\&\, y\cup\{y\}\in x \exists \mathit{Infinite\ set}]$$

نهاية الدالة (التابعة) عند اللانهائية :

يقال للعدد L نهاية الدالة $y = f(x)$ عندما تؤول x إلى اللانهائية وبالرموز $L = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$

تمثيل الأعداد الترتيبية بمجموعات :

لنفرض a هو العدد الترتيبي الذي يمكن أن يحدد بالمجموعة{b : b<a} لجميع الأعداد الترتيبية التي تقل عن a .

$$0=\{b;b<0\}=\phi$$
$$1=\{b:b<1\}=\{0\}=\{\phi\}$$
$$2=\{b:b<2\}=\{0,1\}=\{\phi,\{\phi\}\}$$
$$3=\{b:b<3\}=\{0,1,2\}=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

.

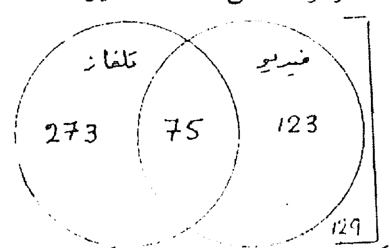
.

.

$$\omega=\{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$
$$\omega++1=\{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\omega\}$$
$$\omega+\omega=\{0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots\ldots\}$$
$$\omega^2=\{0,1,2,\ldots\ldots\omega,\omega+1,\ldots\ldots\omega.2,\omega.2+1,\ldots\omega.3,\ldots\}$$

تطبيقات على المجموعات باستخدام شكل فن Venn diagram

مثال 1 : أجرى مسح على 600 أسرة , و تبين أن 348 أسرة تمتلك جهاز تلفاز و 198 تمتلك جهاز فيديو و 75 من يمتلك الاثنين معا .

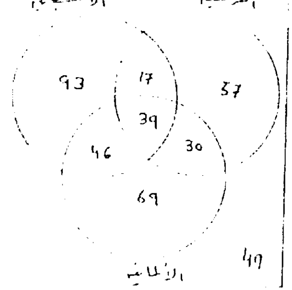


فكم عدد الأسر التي تمتلك :

1. أجهزة فيديو فقط.
2. أجهزة تلفاز فقط.
3. لا تلفاز و لا فيديو.

يمكن توضيح الإجابة في الشكل المقابل، حيث سيكون عدد الأسر التي تمتلك جهاز التلفاز فقط 273 والتي تمتلك الفيديو 123 ولا أحدهما هو 129.

مثال2: هناك 400 شخص تقدموا لوظائف مختلفة حسب احتياجات إحدى المؤسسات، واتضح بين هؤلاء من يجيد اللغات الآتية بالإضافة إلى اللغة الإنجليزية وهم كالتالي: 195 اللغة الإسبانية و143 الفرنسية و184 الألمانية و56 الإسبانية والفرنسية و8 الإسبانية والفرنسية و69 الفرنسية و الألمانية. فكم عدد الأفراد الذين يجدون اللغات التالية من هؤلاء:



1. الإسبانية فقط.
2. الفرنسية فقط.
3. الإسبانية والفرنسية.
4. الفرنسية والألمانية.
5. الإنجليزية فقط.

الإجابة:

سنجد 93 يجيدون الإسبانية و 57 يجيدون الفرنسبة و 17 الاسبانية والفرنسية معا و 30 الفرنسية و الألمانية و 49 الإنجليزية فقط، كما هو موضح في الشكل أعلاه .

فضاء نظرية المجموعات :

يمثل الشكل التصور القياسي البحت لفضاء نظرية المجموعات الذي يحتوى على جميع الأعداد الترتيبية بدءاً من العدم أو اللاشيء حتى اللانهائية المطلقة بصرف النظر عن وجودها الحقيقي :

$\aleph_0 = \omega$ أول عدد ترتيبي أصلاني (يساوى مجموعة الأعداد الطبيعيةN)

$\aleph_1$: ثاني عدد لانهائي أصلاني و أول عدد ترتيبي غير قابل للعد

$\aleph_w$ أول عدد أصلاني تسبقه أعداد أصلانية لانهائية متعددة

k أول عدد أصلانى حيث $\aleph_k = k$ عدد كبير جداً أكبر مما يتصور .

Ω اللانهائية المطلقة يمكن أن يقبل و يعترف به كأحد اللانهائيات التي لا يمكن الوصول إليها ولكن لا يمكن معرفتها تقريبا على حد تعبير كانتور.

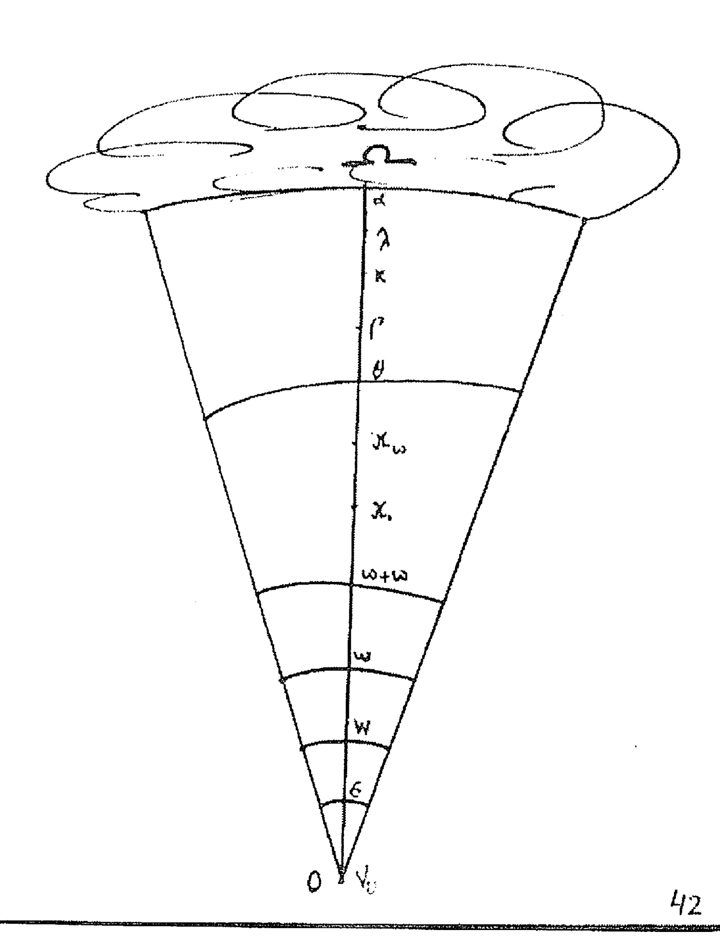
معظم الأبحاث والدراسات الجارية في نظرية المجموعات تحاول أن تسبر غور هذا المجال للتوصل إلى بدهيات تتعلق بالأعداد الأصلانية يكون لها دور فعال في هذا المجال.

V_B: فضاء نظرية المجموعات التقليدية.

V_{w+w}: حيز الرياضيات العادية

V_w : يحتوى هذا المجال على الأطر الممكنة.

V_6: (جوجول)



المحتويات

المصادر

أولا: العربية

1. د.محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضى، دار النهضة العربية—بيروت 1984

2. د.محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية - بيروت 1969

3. محمود محمد كتكت: نظرية المجموعات، دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان 1982

4. زلاتكاشبورير : الرياضيات في حياتنا، ترجمة د.فاطمة عبدالقادر سلسلة عالم المعرفة –الكويت 1987

5. د.محمد مهران: فلسفة برتراند رسل، دار المعارف ط2، القاهرة 1979

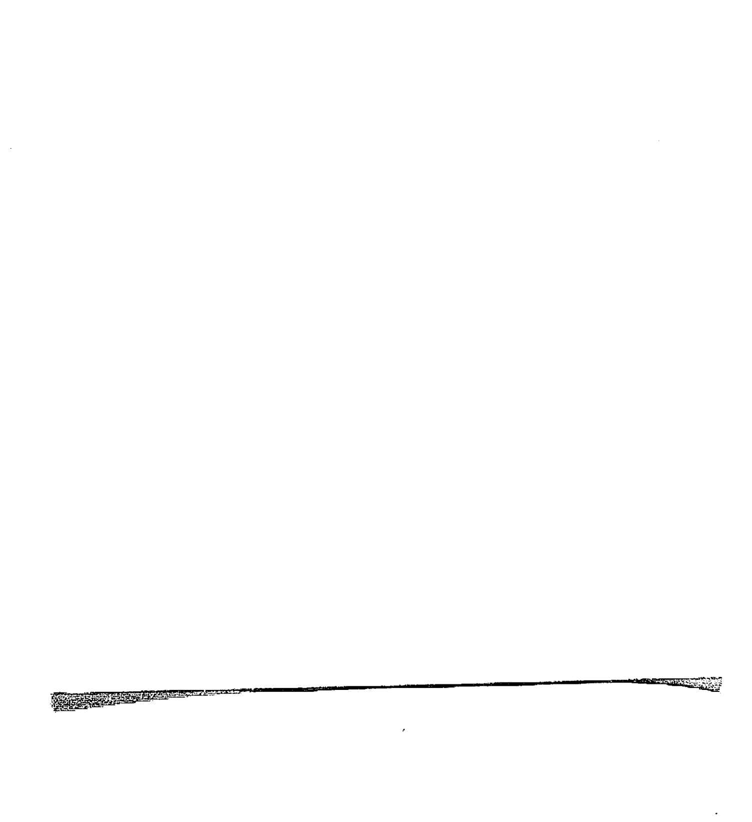
6. الشيخ كامل محمدمحمد عويضة: زينون وما حققته الفلسفة اليونانية دار الكتب العلمية —بيروت 1994

7. حل مفارقات زينو، مجلة العلوم، المجلد 12 العدد 10، اكتوبر 1996

ثانيا: الأجنبية؛

1. Alsiddiqi Abdullatif(1986): An Approach to the problem of the Infinite, Ph.D thesis, University of Poona-India
2. G.Cantor(1955): Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite , Trans.Phiip Jourdain - Dover
3. I.Grattan-Guiness (1980): From the Calculus to Set Theory Ed Duckworth, Chapter 5: The development of Centurion Set Theory
4. Dauben Joseph Warren(1990): G.Cantor His Mathematics and Philosophy of the infinite ,Princeton
5. Michael Hallett(1986): Cantorian Set Theory and Limitation of Size , Oxford
6. Victor Harnik, Infinitesimals from Leibniz to Robinson The Mathematical Intelligencer Vol.8 No.2 1986
7. Paul J. Cohen & R. Hersh , Non-Cantorian Set Theory , Scientific American Dec 1987
8. Stewart Ian& Tall David (1987): The Foundation of Mathematics, Oxford
9. Davis Phiip&Hersh Reuben(1984): The Mathematical Experience ,Penguin books
10. Temple George(1981): 100 years of Mathematics , Duckworth
11. Kline Morris(1980): Mathematics,the loss of certainty, oxford 1980
12. Moore,A.W (1993): The Infinite , Routledge

المركز الإسلامي الثقافي
مكتبة سماحة آية الله العظمى
السيد محمد حسين فضل الله العامة





الناشر

دار الشروق

دار الشروق ل

عمان – تلفون: ٦٢٤٣٢١

دار الشروق ل

رام الله – المناره – الشارع

ISBN 9957 - 00 - 038 - 1 (ردمك)